

重力崩壊コアにおける 原子核存在比を含む状態方程式

早稲田大学 山田研究室 古澤 峻

共同研究者 山田 章一(早稲田大学)

住吉 光介(沼津高専)

Outline

1、導入

2、手法

3、結果

4、まとめと今後の課題

1、導入

○ 重力崩壊コア中におけるバリオンの状態の変化

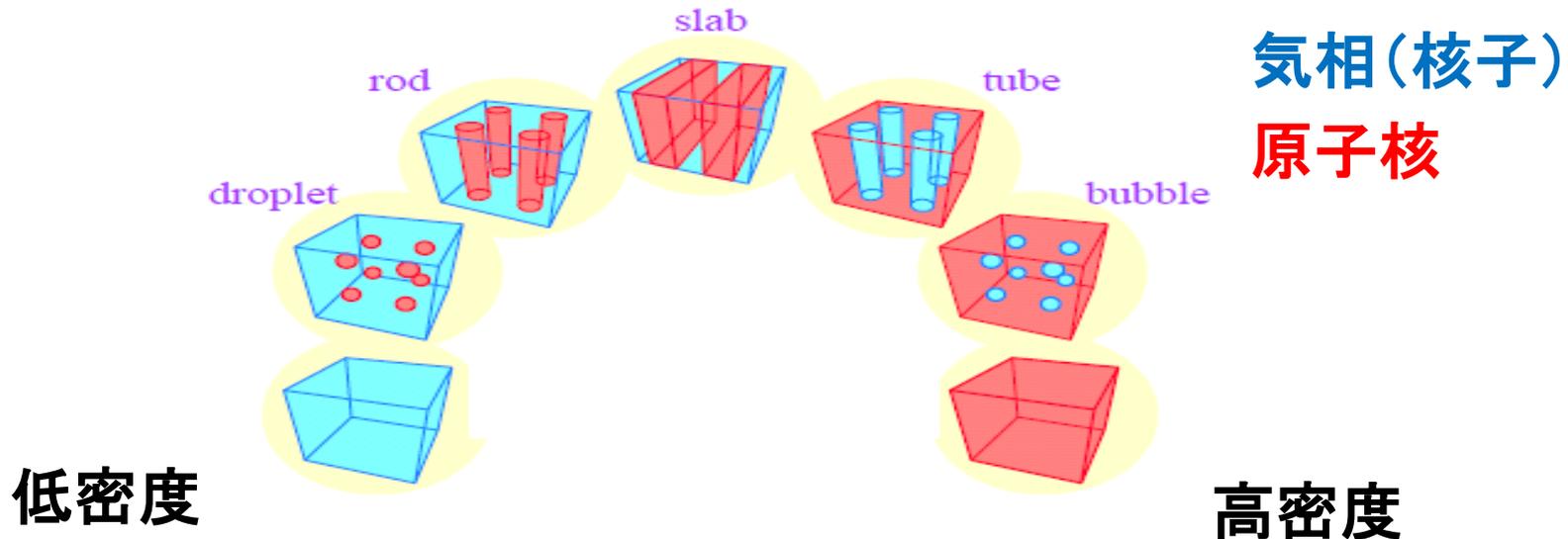
崩壊前 : 鉄(Fe56)

崩壊中 : 様々な原子核、核子

(バウンス直前: パスタ相)

バウンス時: 一様核物質(中性子、陽子の液状状態)

パスタ相



○ 先行研究 (Shen EOS (Shen et. al. (1998)))

モデル: RMF (相対論的平均場近似)

粒子: 平均的な質量数を持った原子核、核子、 α 粒子

範囲: 密度 ρ : $10^5 \sim 10^{15.5} \text{ g/cm}^3$

温度 T : $0 \sim 50 \text{ MeV}$

レプトン比 Y_e : $0.01 \sim 0.6$

重い原子核は1種類しか入っていない。

○ 動機 (原子核存在比がなぜ重要か)

1、ニュートリノ-原子核の干渉散乱 (A の2乗に比例)

A の平均の2乗 \neq A の2乗の平均

2、電子捕獲の反応率 (原子核によって異なる)

→ バウンス時の Y_e → Inner Coreの半径

3,手法(原子核存在比まで含むEOS)

Y_e, T, ρ  原子核存在比、他の物理量(P、S)

手法 **NSE**(核反応平衡状態)を仮定

質量保存、電荷保存のもと自由エネルギーが最小

$$\sum_i A_i n_i = n_B = \rho/m_B \quad \sum_i Z_i n_i = n_e = Y_e n_B = Y_e \rho/m_B$$

考える粒子: **陽子、中性子、すべての原子核(質量数1000程度)**

自由エネルギーの改良

- 1、核密度でRMF(ShenEOS)につながる。
- 2、高密度におけるクーロン、表面エネルギーの変化
- 3、droplet→(Pasta)→bubbleの自由エネルギーの変化
- (4、低密度でMass Dataと一致するMass formula)

自由エネルギーの改良

理想気体のヘルムホルツ自由エネルギー密度

$$f = f_{p,n} + \sum_i n_i \left\{ \cancel{F_{kin}^i} + \underline{F_{bulk}^i} + \underline{F_{symm}^i} + \cancel{F_{surf}^i} + \cancel{F_{coul}^i} \right\}$$

m_i

$$f_{p,n} = n_{p,n} \left\{ kT \log \left(\frac{n_{p,n}}{2n_Q} \right) - kT + m_{p,n} \right\} \quad \left[n_Q = \left(\frac{2\pi m_i kT}{h^2} \right)^{3/2} \right]$$

$$F_{kin}^i = kT \log \left(\frac{n_i}{g_i n_Q} \right) - kT$$

M a s s F o r m u l a

$$F_{bulk}^i = Z_i m_p + N_i m_n - a_b A_i \quad F_{surf}^i = 4\pi r_n^i{}^2 \sigma = 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} \frac{A_i}{n_s} \right)^{2/3} \sigma$$
$$F_{symm}^i = a_{symm} \frac{(Z_i - N_i)^2}{A_i} \quad F_{coul}^i = \frac{3}{5} \frac{1}{r_n^i} (e Z_i)^2 = \frac{3}{5} (e Z_i)^2 \left(\frac{3}{4\pi} \frac{A_i}{n_s} \right)^{-1/3}$$

①自由核子

- ・核子は原子核による排除体積効果
- ・RMFで計算(低密度側は理想気体に一致)

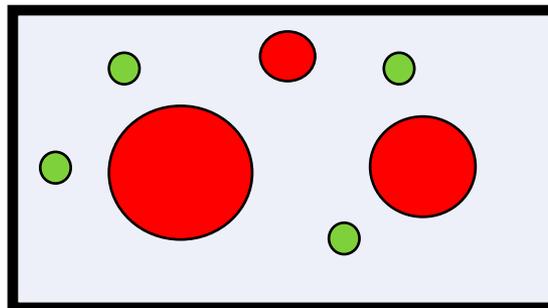
$$\eta = \frac{V'}{V} = 1 - \sum \frac{A_i n_i}{n_s}$$

$$V' = V - \sum N_i V_n^i$$

V : 全体積

V' : 核子の動き回れる体積

$\sum N_i V_n^i$: 原子核の体積(排除体積)



$f_{p,n}$



$\eta f_{p,n}^{RMF}(n'_p, n'_n)$

②運動項

・ボルツマン気体を仮定

$$F_{kine}^i = kT \log \left(\frac{n_i}{g_i n_Q} \right) - kT$$

・スピン自由度を温度Tの関数で与える。(Fai&Rundurp(1982))

$$g_{AZ}(T) = g_{AZ}^0 + \frac{c_1}{A^{5/3}} \int_0^\infty dE^* e^{-E^*/T} \exp \left(\sqrt{2a(A)E^*} \right)$$

原子核同士のクーロン力、排除体積による、運動の制限。
(ref. Lattimer 1991)

$$F_{kine}^i \rightarrow (1 - nb/ns) F_{kine}^i$$

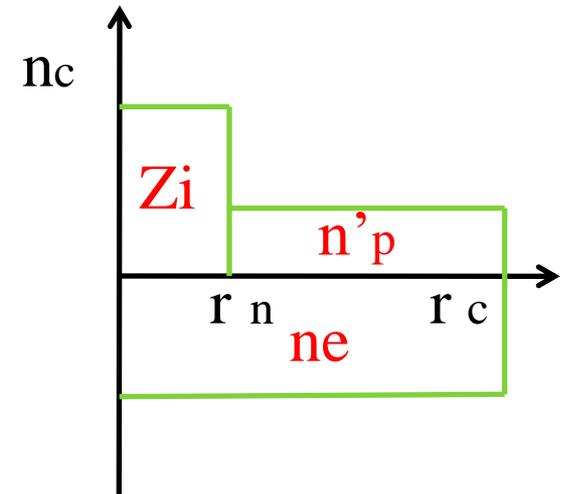
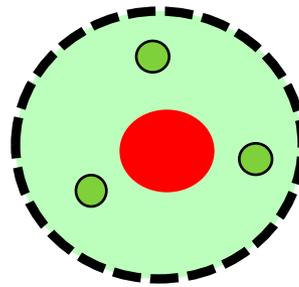
③クーロンエネルギー

Wigner-Seitz Cellを取って考える。

一様分布の電子と、原子核の外を動く陽子を含めて荷電中立

$$V_i n_e = Z_i + (V_i - V_n) n'_p$$

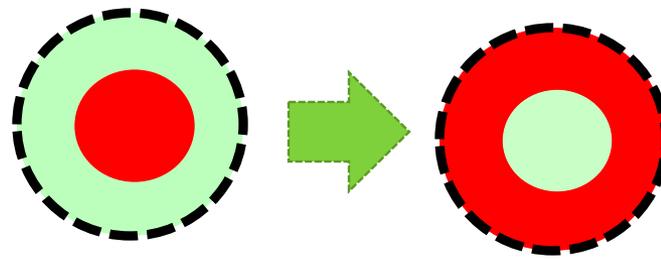
$$\frac{\text{セルの体積 } V^i}{\text{原子核の体積 } V_n^i} \\ \underline{\underline{\text{バブルの体積 } V_b^i}}$$



$$V^i = \frac{Z_i - n'_p V_n^i}{n_e - n'_p}$$

$$V_n^i = \frac{A_i}{n_{suti}}$$

$$V_b^i = V^i - V_n^i$$



原子核の
体積比

$$u^i = \frac{V_n^i}{V^i}$$

u^i が1/2の時バブルになるとする

$$F_{coul}^i = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z_i^2}{r_n^i} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1/3} \frac{e^2}{n_s^2} \left(\frac{Z_i}{A_i} \right)^2 \left(\frac{A_i}{n_s} \right)^{5/3} \rightarrow$$

$$F_{coul}^i = \begin{cases} \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1/3} \frac{e^2}{n_s^2} \left(\frac{Z_i - n_p' V_n^i}{A_i} \right)^2 V_n^{i5/3} D(u^i) & (u^i \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1/3} \frac{e^2}{n_s^2} \left(\frac{Z_i - n_p' V_n^i}{A_i} \right)^2 V_b^{i5/3} D(1 - u^i) & (u^i > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

電子、陽子から受けるクーロン力

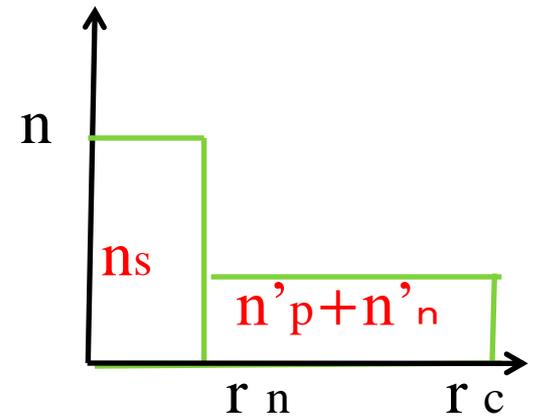
④表面エネルギー

バブルのときは**バブルの表面積に比例する**。

外部の核子との核力により弱められる効果

(内部と外部の密度差の2乗に比例)

$$F_{surf}^i = 4\pi r_n^i{}^2 \sigma = 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} \frac{A_i}{n_s} \right)^{2/3} \sigma$$



$$F_{surf}^i = \begin{cases} 4\pi r_n^i{}^2 \sigma \left(1 - \frac{n'_p + n'_n}{n_s} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} V_n^i \right)^{2/3} \sigma \left(1 - \frac{n'_p + n'_n}{n_s} \right)^2 & (u^i \leq 1/2) \\ 4\pi r_b^i{}^2 \sigma \left(1 - \frac{n'_p + n'_n}{n_s} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{3}{4\pi} V_b^i \right)^{2/3} \sigma \left(1 - \frac{n'_p + n'_n}{n_s} \right)^2 & (u^i > 1/2) \end{cases}$$

⑤体積、対称エネルギー

低密度側

質量項が**実験値**と一致するように置く。

$$F_{bulk}^i + F_{symm}^i = M_i^{\text{data}} - [E_i^C]_{\rho, n'_p, n'_n=0} - [E_i^S]_{\rho, n'_p, n'_n=0}$$

高密度側

原子核の内部は、ほぼ核密度

核密度の**一様各物質**の自由エネルギー(RMFで計算)に置き換えられる。

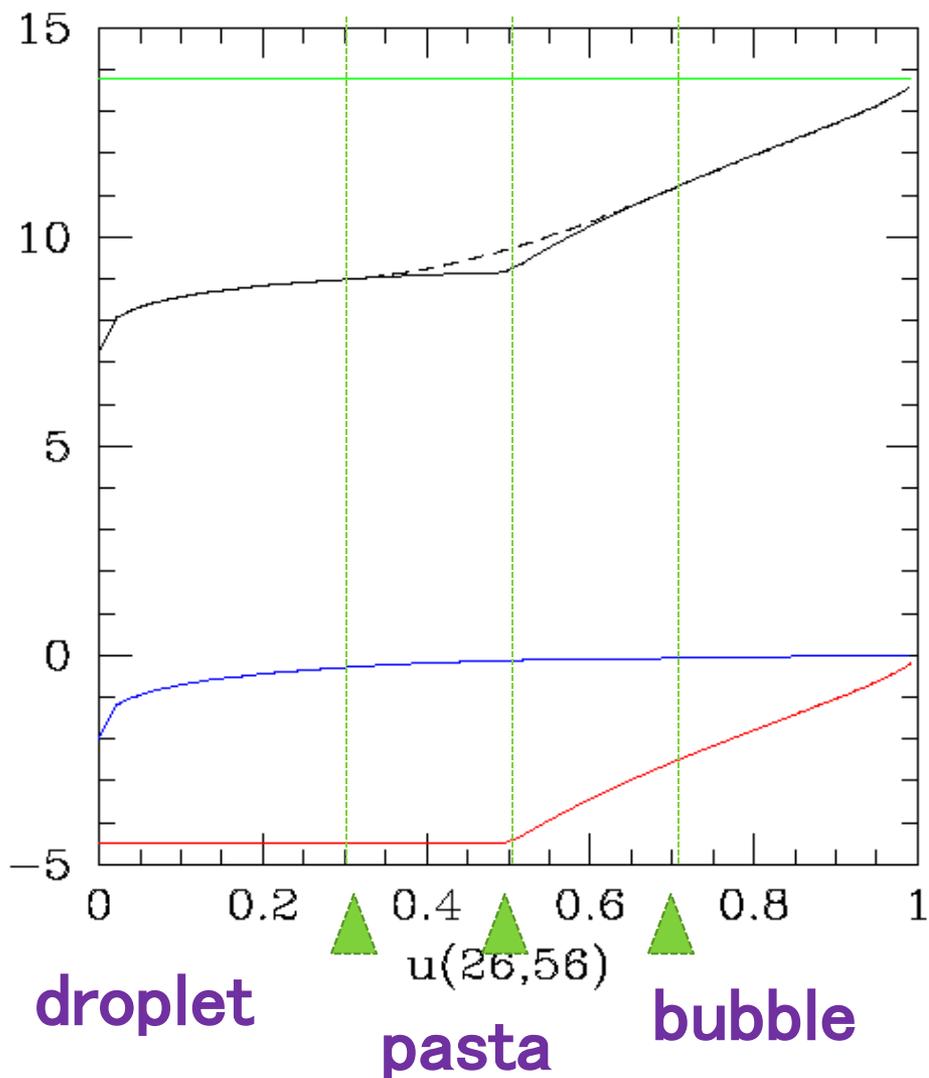
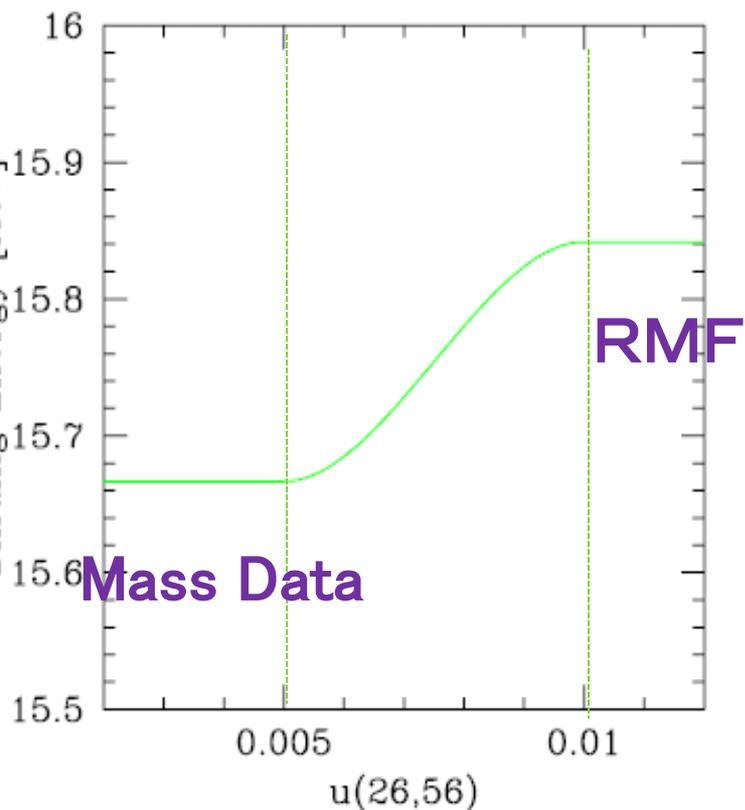
$$F_{bulk}^i + F_{symm}^i \longrightarrow A_i F_{bulk}^{RMF}(T, n_s, Z_i/A_i)$$

一様各物質はクーロン、表面エネルギーが効かない
→**体積、対称エネルギー**しか残っていない。

束縛エネルギーの変化

束縛エネルギー(Fe56)

核力+対称 クーロン 表面



自由エネルギーのまとめ

低密度側

$$f = \eta \underline{f_{p,n}^{RMF}}(n'_p, n'_n) + \sum_i n_i \left\{ \underline{(1 - nb/ns) F_{kine}^i} + M_i^{\text{data}} \right\}$$

→1

→1

低密度では、通常の実験値を使ったNSEになる

高密度側

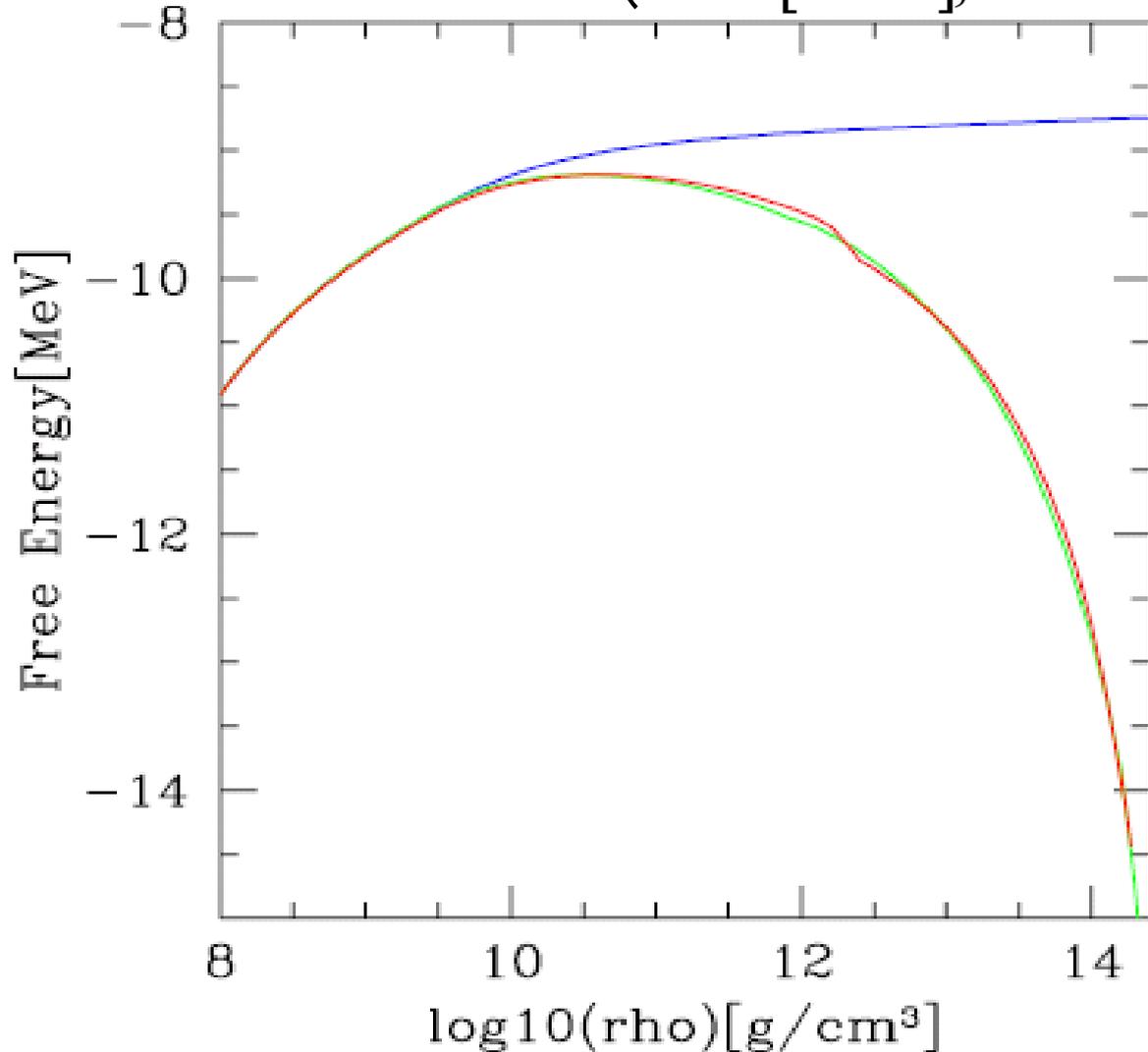
$$f = \underline{\eta f_{p,n}^{RMF}}(n'_p, n'_n) + \sum_i n_i \left\{ \underline{(1 - nb/ns) F_{kine}^i} \right. \\ \left. + \underline{A_i F_{bulk}^{RMF}}(T, n_s, Z_i/A_i) + \underline{F_{surf}^i}(n'_n, n'_p) + \underline{F_{coul}^i}(n'_p) \right\}$$

高密度になると運動、表面、クーロン項は落ちる

→RMF(shen)の部分だけが残る。

5、結果

結果①単位バリオンあたりの自由エネルギー (f/nb-Mb)
($T = 1[\text{MeV}], Y_e = 0.5$)

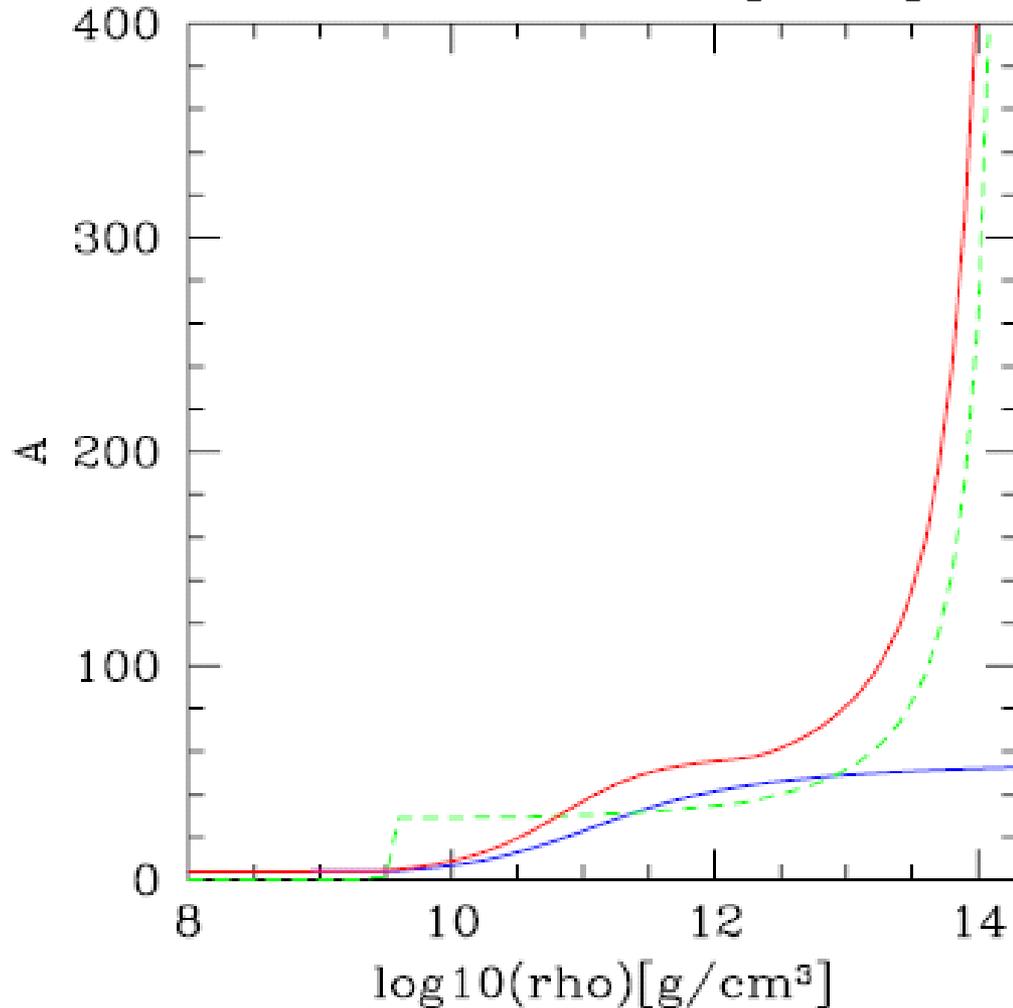


- 本研究
- RMF(Shen)
- NSE(理想気体)

ShenEOSほぼ一致。

結果②平均質量数

$$T = 1[\text{MeV}], Y_e = 0.5$$



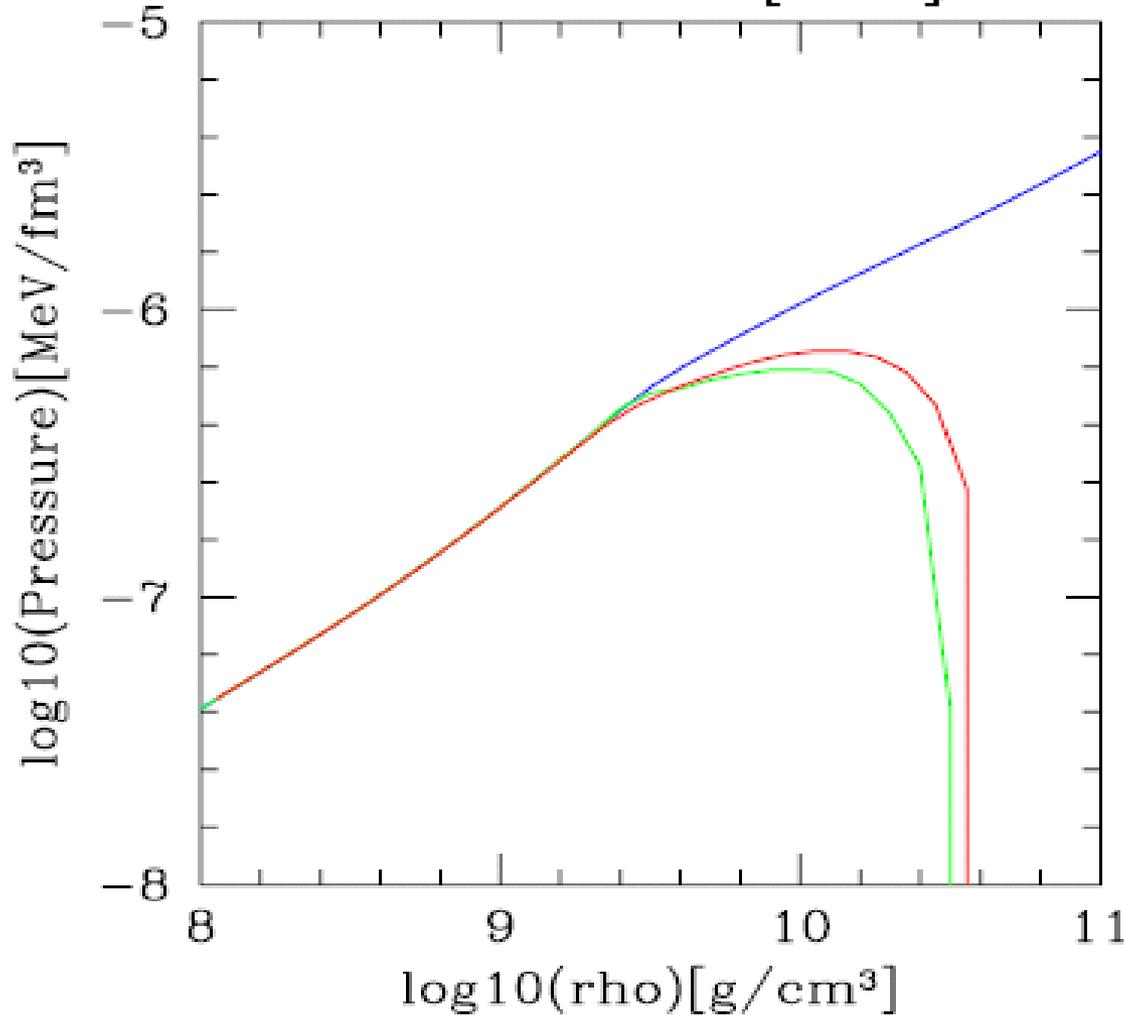
- 本研究
- RMF (Shen)
- NSE (理想気体)

・初めは α 粒子
→ 重い原子核
($A=56$ 近傍)

・高密度側では、
さらに大きくなる (Pasta
相に向かう)

結果③バリオンによる圧力

$$T = 1[\text{MeV}], Y_e = 0.5$$



- 本研究
- RMF (Shen)
- NSE (理想気体)

・低密度側: ほぼどれも同じ

・高密度側:
クーロン項からくる負の圧力によっておちる
効き始めが違う。

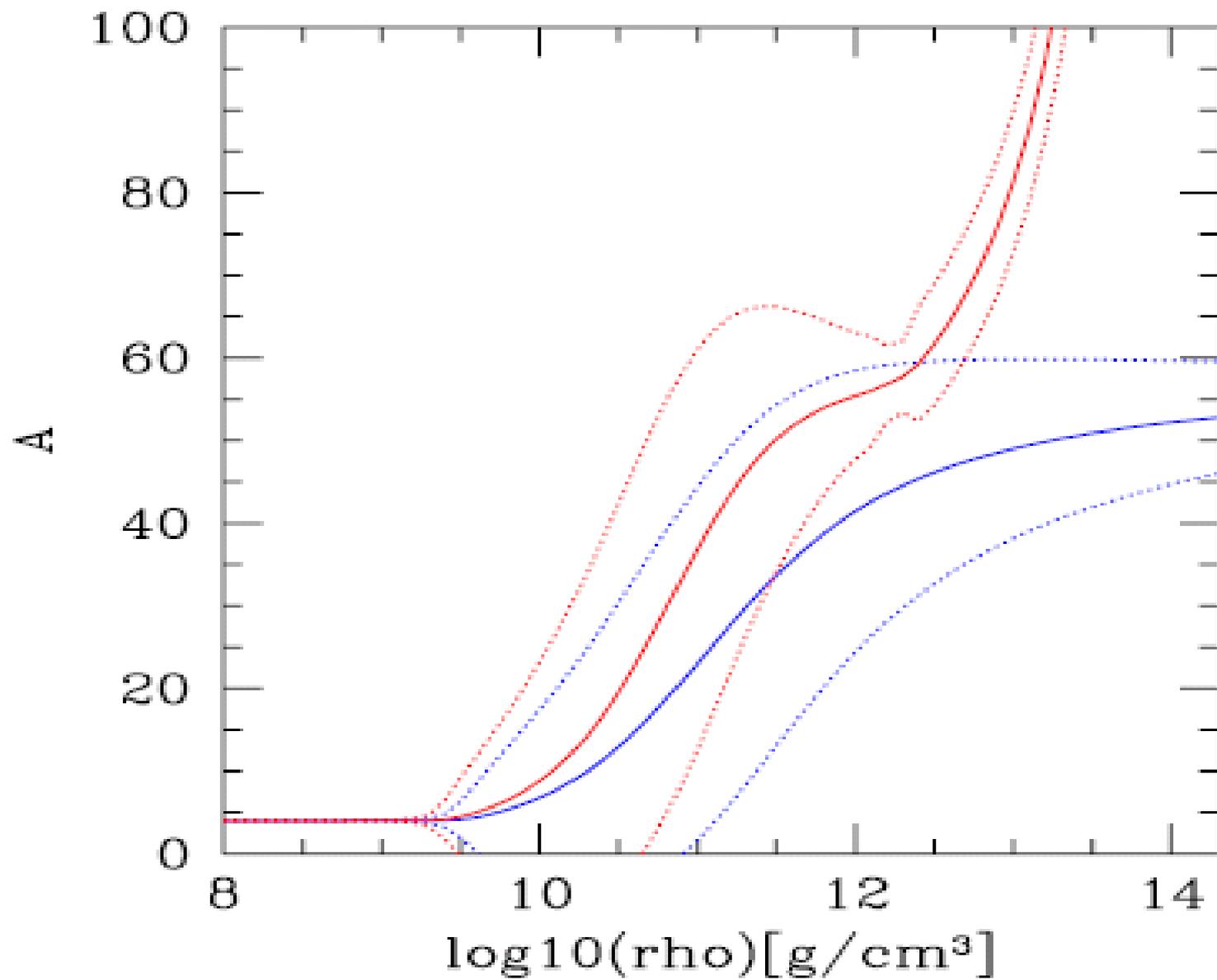
4、まとめと今後の課題

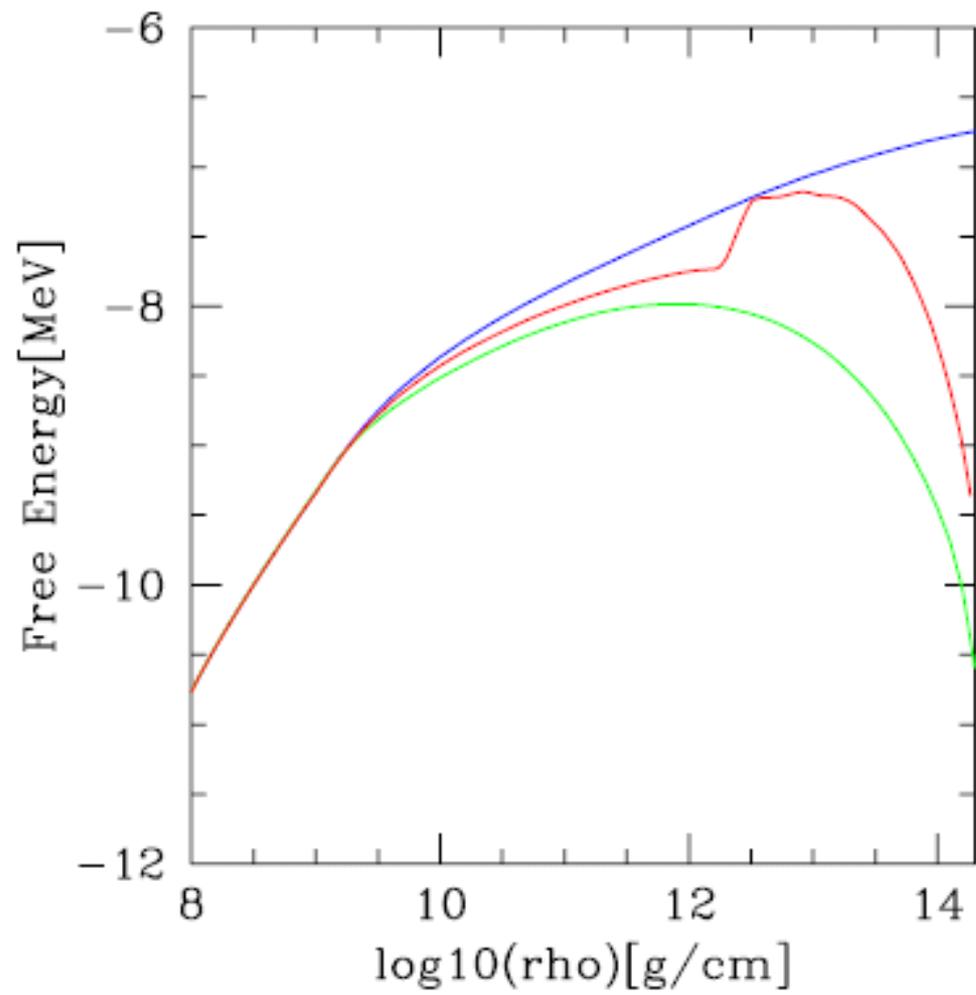
高密度補正、RMF計算、原子核形状の変化、を考慮した自由エネルギーから、NSEを用いて状態方程式を作成。

- Free EnergyやPressureはShen EOSとさほど変わらない
- 平均質量数は、変わる。

今後の課題

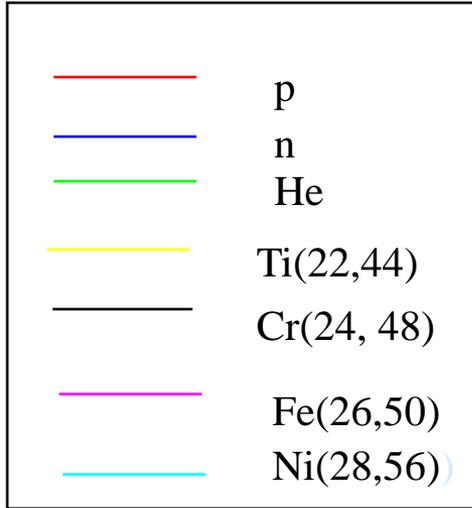
- Mass Data→Formula, droplet→bubbleなどの転移法
- Surface Tention の改良
- 重力崩壊以外の現象に適応





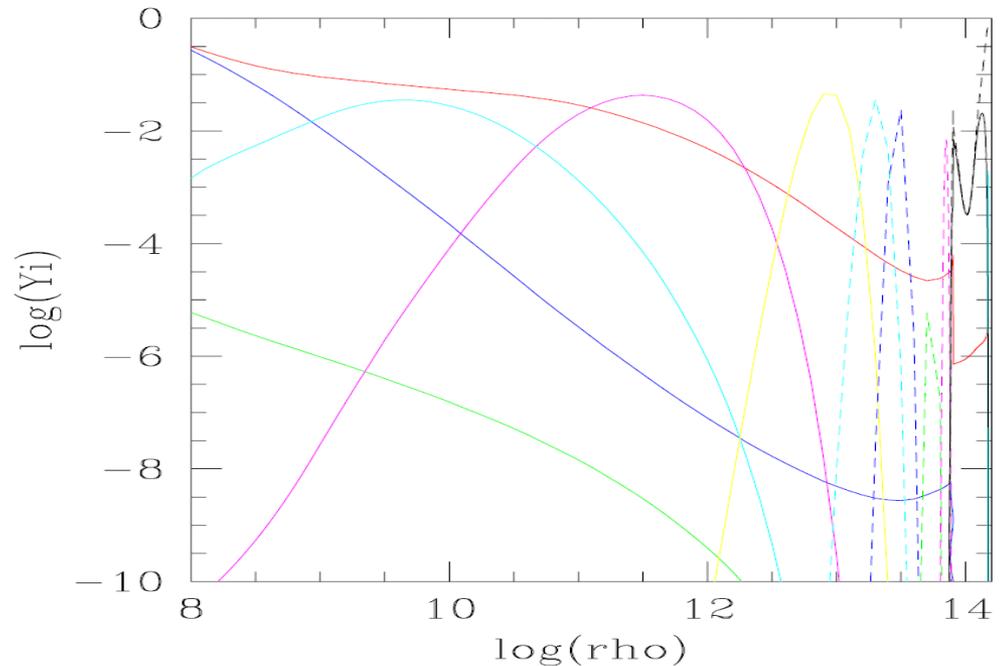
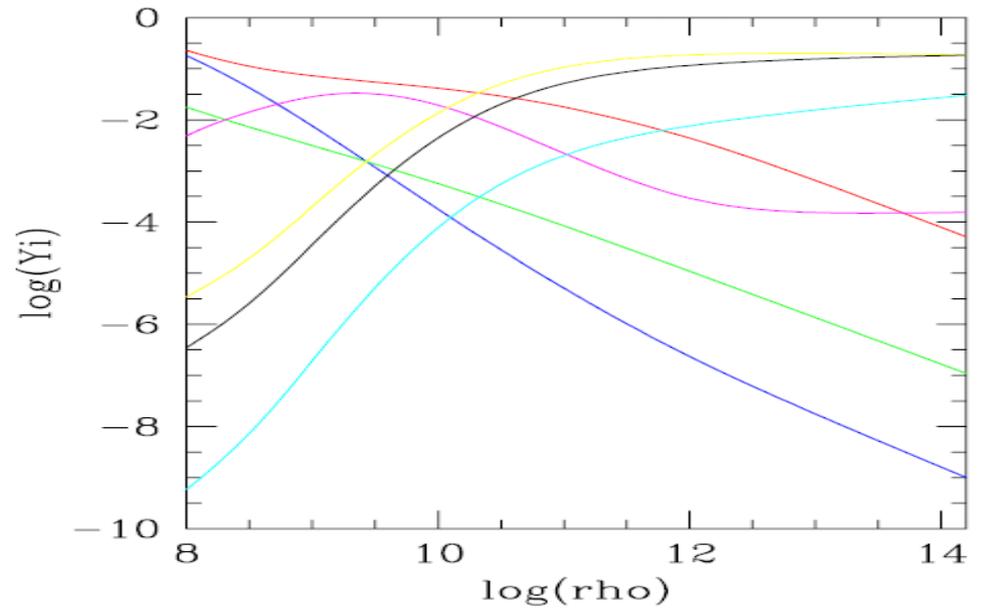
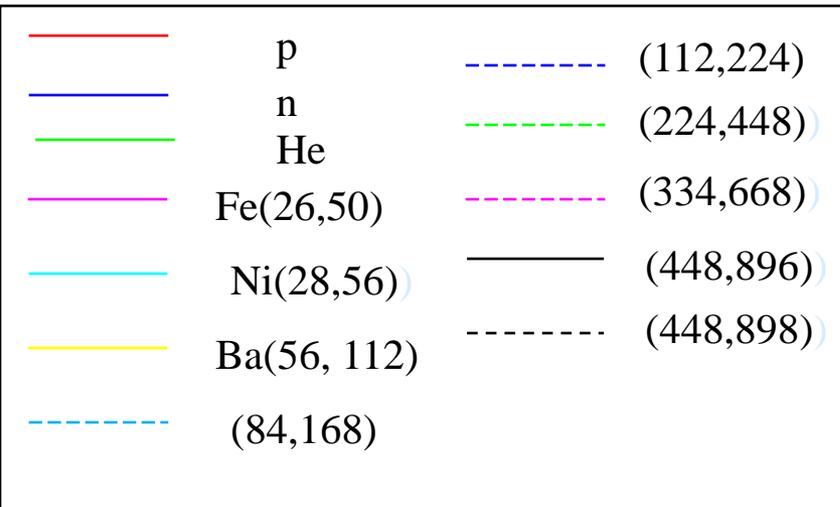
結果③存在比

$$T = 10^{10} [\text{K}], Y_e = 0.5$$

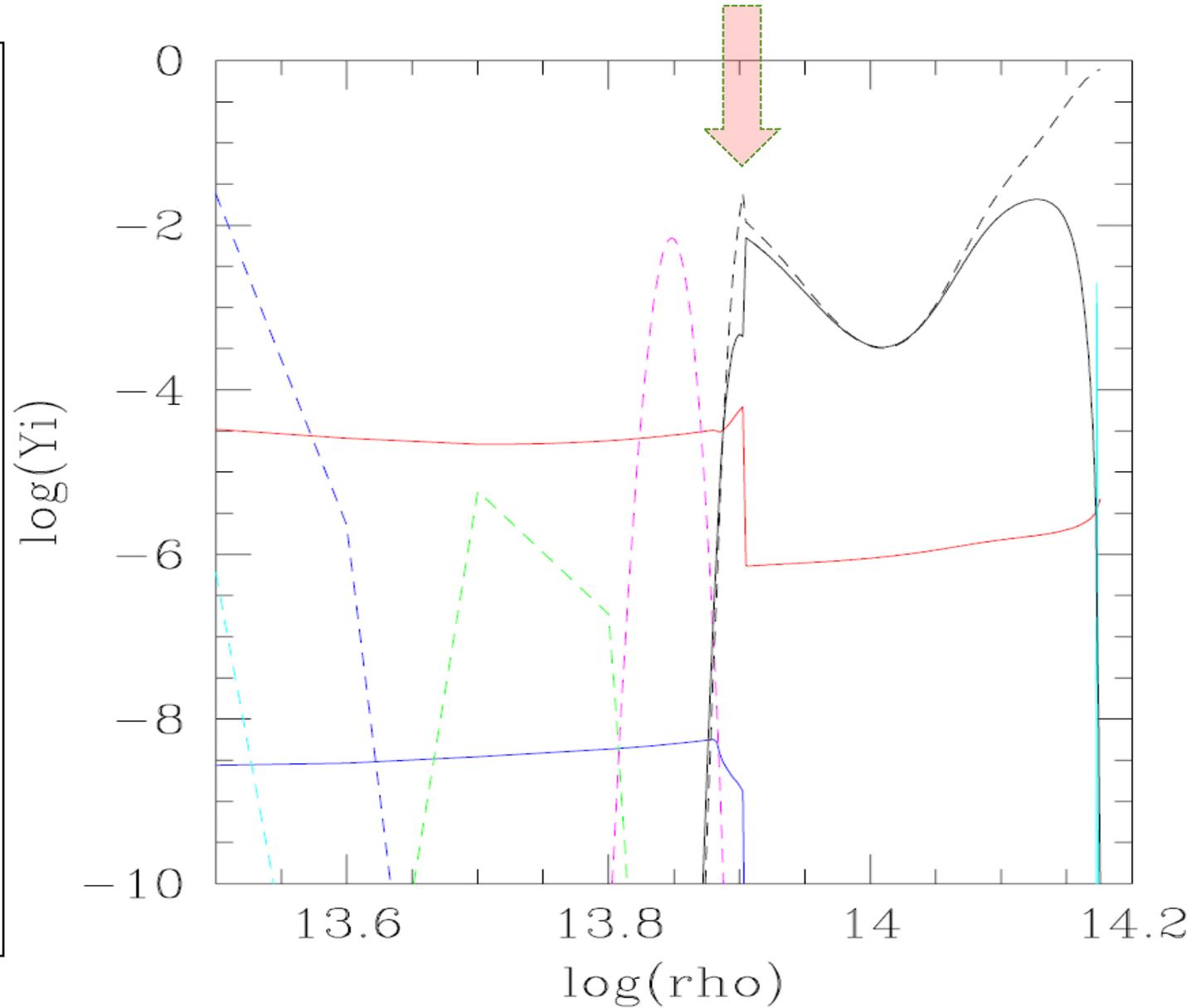
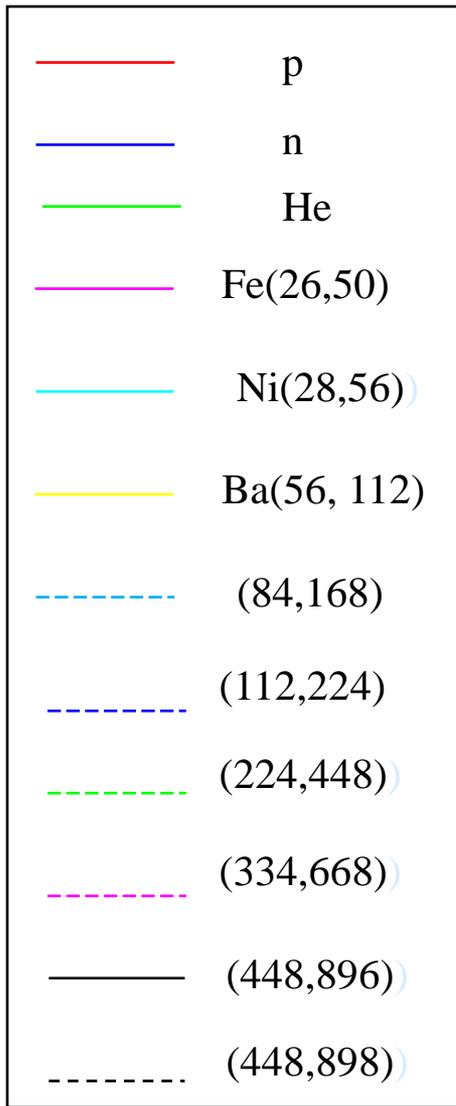


理想気体
NSE

本研究

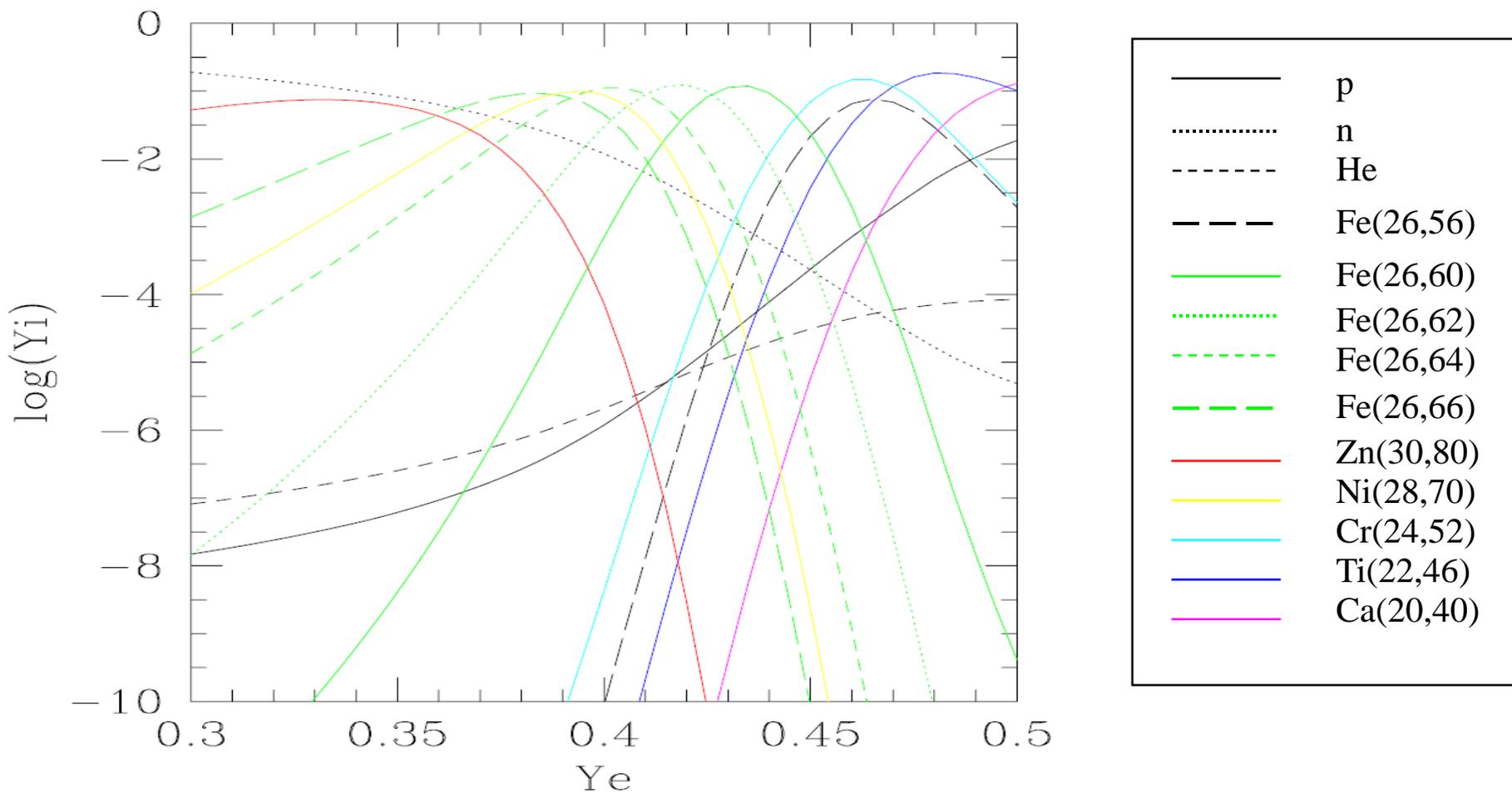


多く存在する原子核 ($Z_i/A_i=0.5$ の原子核) がバブル構造をとる。



ボルツマンのみのNSEの結果2

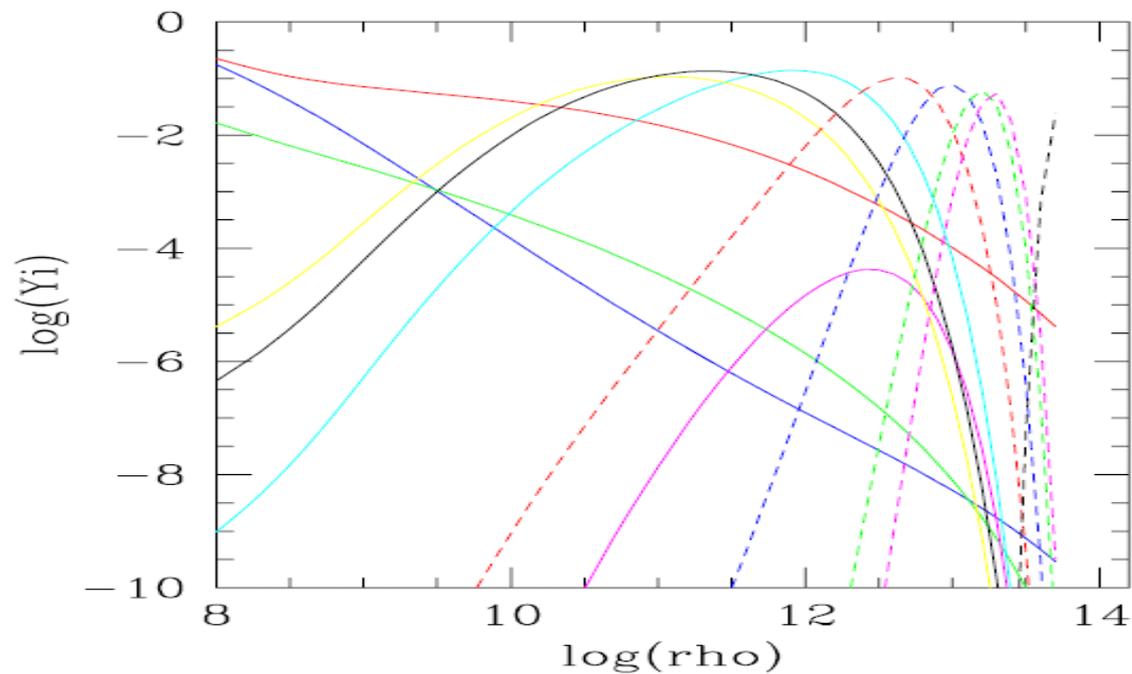
$$\left(T = 10^{10} [\text{K}], \rho = 10^{11} \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right] \right)$$



5、テスト結果

ボルツマン気体NSEと
クーロン遮蔽D(u)入りNSE
の比較

($T = 10^{10}$ [K], $Y_e = 0.5$)



$$(n \leftrightarrow \mu)$$

ボルツマンガス

$$n = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - mc^2}{kT} \right)$$

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n$$

$$n_i = \left(\frac{m_i kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{(A_i - Z_i)\mu_n + Z_i \mu_p - ((A_i - Z_i)m_n + Z_i m_p - B(A_i, Z_i))}{kT} \right)$$

$$= n_p^{Z_i} n_n^{A_i - Z_i} \left(\frac{m_i kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{m_B kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}(-A_i)} \exp\left(\frac{B(A_i, Z_i)}{kT} \right)$$

(Sahaの式)

NSE (核統計平衡) 存在比の求め方

NSE: あらゆる化学反応が平衡を満たしているとする仮定。

条件①: 質量保存

条件②: 電荷保存

$$\textcircled{1} \quad \frac{\rho}{m_B} - \sum A_i n_i = 0$$

$$\textcircled{2} \quad Y_e \frac{\rho}{m_B} - \sum Z_i n_i = 0$$

A: 質量数、Z: 原子番号

n数密度 mB: 核子密度

i: 原子核の種類

条件①、②のもと、 n_p, n_n, n_i の変化に対し、

自由エネルギー f が最小となる。(ラグランジュ未定乗数法)

の微分から
 $\frac{\partial}{\partial n_i} (f - \alpha \textcircled{1} - \beta \textcircled{2}) = 0$

n_p, n_n α, β が決

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n$$

$\mu \longleftrightarrow n$
 ボルツマンガス

変数 $i+2$ 個が式 $i+2$ 個から求まる。

$$n = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - mc^2}{kT} \right)$$

(NSE 存在比の求め方)

条件①: 質量保存

$$\rho / m_B - \sum A_i n_i = 0$$

条件②: 電荷保存

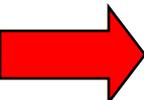
条件③: u の定義

$$u = \sum_{i(\neq pn)} \frac{n_i A_i}{n_0}$$

$$Y_e \frac{\rho}{m_B} - \sum Z_i n_i = 0$$

条件①、②、③のもと、自由エネルギー F が最小となる。

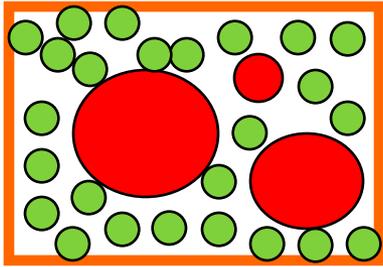
$$\frac{\partial}{\partial n_i} (F - \alpha \textcircled{1} - \beta \textcircled{2} - \gamma \textcircled{3}) = 0 \quad (n_p, n_n, u \text{ の微分から } \alpha\beta\gamma \text{ が決まる)}$$


$$g_1(\rho) \mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n - \gamma (A_i / \rho_0)$$

変数 $i+3$ 個が、式 $i+3$ から求まる。

原子核占有体積 u について

u : 全体体積のうち原子核が占める体積



$$\begin{aligned} u &= \frac{\sum_{i(\neq pn)} V_i \text{ (原子核体積)}}{V \text{ (全体積)}} \\ &= \sum_{i(\neq pn)} \frac{V_N A_i N_i}{V} \\ &= \sum_{i(\neq pn)} V_N n_i A_i \end{aligned}$$

一核子の体積

$$V_N = 1 / n_0$$

n_0 核子密度

$$n_0 = \rho_0 / m_B$$