

クラスター変分法による 超新星爆発用 核物質状態方程式の作成

富樫 甫, 神沢 弘明, 鷹野 正利 (早稲田大学)

鈴木 英之 (東京理科大学)

住吉 光介 (沼津高専)

Contents

I : Introduction

II : 方法

III : 計算結果

IV : 現在苦労している点

I : Introduction

この研究の目的は、クラスター変分法による
超新星爆発(SN)シミュレーションのための
核物質状態方程式(EOS)の作成

< 研究の背景 >

核物質 EOS は SN の機構を解明するための重要な役割を果たす。

SNシミュレーションに適用可能なEOSは少ない。

1. Lattimer-Swesty EOS : 圧縮性液滴模型 (NPA535(1991)331)
2. Shen EOS : 相対論的平均場理論 (NPA637(1998)435)
 - Ishizuka EOS : ハイペロン物質 (J. Phys. G 35(2008)085201)
 - Nakazato EOS : クォーク-ハドロン相転移 (PRD 77(2008) 103006)

どのEOSも現象論的模型に基づいている。

多体変分計算による現実的核力に基づいた核物質状態方程式の作成！

SNシミュレーションのためのEOS作成の手順

一様核物質

絶対零度及び有限温度における
中性子物質($x = 0$)と対称核物質($x = 0.5$)状態方程式

(NPA791(2007)232)

絶対零度における非対称核物質状態方程式($0 \bullet x \bullet 0.5$)

★有限温度における非対称核物質状態方程式($0 \bullet x \bullet 0.5$)

非一様核物質

絶対零度における非一様核物質状態方程式

有限温度における非一様核物質状態方程式

SNシミュレーションのための核物質状態方程式の完成

Ⅱ：一様核物質状態方程式作成の方法

*Schmidt and Pandharipande*の方法を拡張する。(Phys. Lett. B87(1979) 11)

(A. Mukherjee et al., Phys. Rev. C 75(2007) 035802)

自由エネルギー

$$\frac{F}{N} = \frac{E_0}{N} - T \frac{S_0}{N}$$

$\frac{E_0}{N}$: 近似的内部エネルギー

$\frac{S_0}{N}$: 近似的エントロピー

近似的内部エネルギー

$$\frac{E_0}{N} = \frac{E_2}{N} + \frac{E_3}{N}$$

絶対零度フェルミ気体波動関数
に対する H_3 に基づく期待値

有限温度における Jastrow 型波動関数 に対する H_2 の期待値

二体力までのハミルトニアン

$$H_2 = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^N V_{ij}$$

AV18 ポテンシャル

三体力ハミルトニアン

$$H_3 = \sum_{i<j<k}^N V_{ijk}$$

UIX ポテンシャル

有限温度における波動関数と平均占有確率

$$\frac{E_0}{N} = \frac{E_2}{N} + \frac{E_3}{N}$$

有限温度におけるJastrow型波動関数

$$\Psi(T) = \text{Sym} \left[\prod_{i < j} f_{ij} \right] \Phi_F(n_p(k), n_n(k))$$

Φ_F : 有限温度における
フェルミ気体の波動関数

相関関数は絶対零度で決定されたものを使用する。

相関関数

$$f_{ij} = \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 \left[\underbrace{f_{Cts}^{\mu}(r_{ij})}_{\text{中心力}} + s \underbrace{f_{Tt}^{\mu}(r_{ij})}_{\text{テンソル力}} S_{Tij} + s \underbrace{f_{SOt}^{\mu}(r_{ij})}_{\text{スピン軌道力}} (\mathbf{L}_{ij} \cdot \mathbf{s}) \right] P_{tsij}^{\mu}$$

μ : アイソスピン第三成分

P_{ts}^{μ} : スピン・アイソスピン射影演算子

陽子と中性子の平均占有確率をそれぞれ定義する。

平均占有確率

$$n_i(k) = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\varepsilon_i(k) - \mu_i}{k_B T} \right] \right\}^{-1}$$

単一粒子エネルギー

$$\varepsilon_i(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i^*} \quad i = p, n$$

m_i^* : 核子の有効質量

三体力エネルギー

$$\frac{E_0}{N} = \frac{E_2}{N} + \frac{E_3}{N}$$

UIX ポテンシャル

$$V_{ijk} = V_{ijk}^R + V_{ijk}^{2\pi}$$

V_{ijk}^R : 斥力項

$V_{ijk}^{2\pi}$: 2π 交換項

絶対零度のフェルミ気体の波動関数に対する期待値

$$\frac{E_3^R}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i<j<k} \langle V_{ijk}^R \rangle_F$$

$$\frac{E_3^{2\pi}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i<j<k} \langle V_{ijk}^{2\pi} \rangle_F$$

三体力エネルギー

$$\frac{E_3}{N}(\rho, x) = \alpha \frac{E_3^R}{N}(\rho, x) + \beta \frac{E_3^{2\pi}}{N}(\rho, x) + \underbrace{\gamma \rho^2 e^{-\delta \rho} [1 - (1 - 2x)^2]}_{\text{補正項}}$$

近似的エントロピー

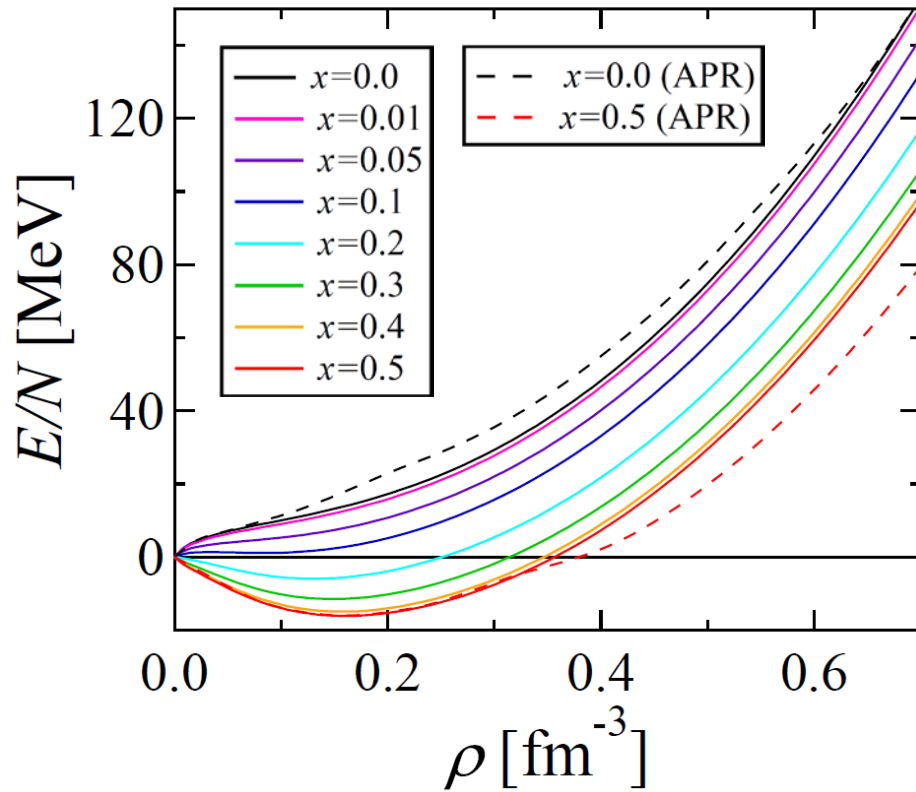
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は調節パラメター

$$\frac{S_0}{N} = -\frac{k_B}{N} \sum_{i=p,n} \sum_{\text{spin}} \sum_k \{ [1 - n_i(k)] \ln [1 - n_i(k)] + n_i(k) \ln n_i(k) \}$$

自由エネルギー を m_p^* と m_n^* について最小化する

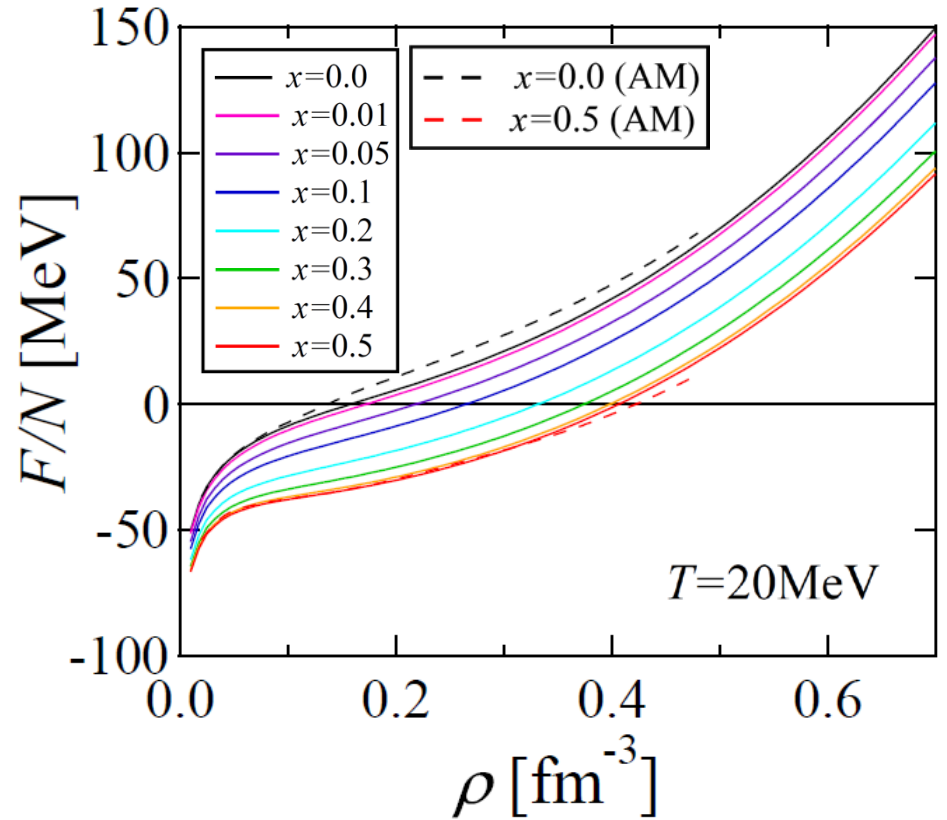
Ⅲ:計算結果

一核子あたりの自由エネルギー



$T=0$ MeVにおけるエネルギー

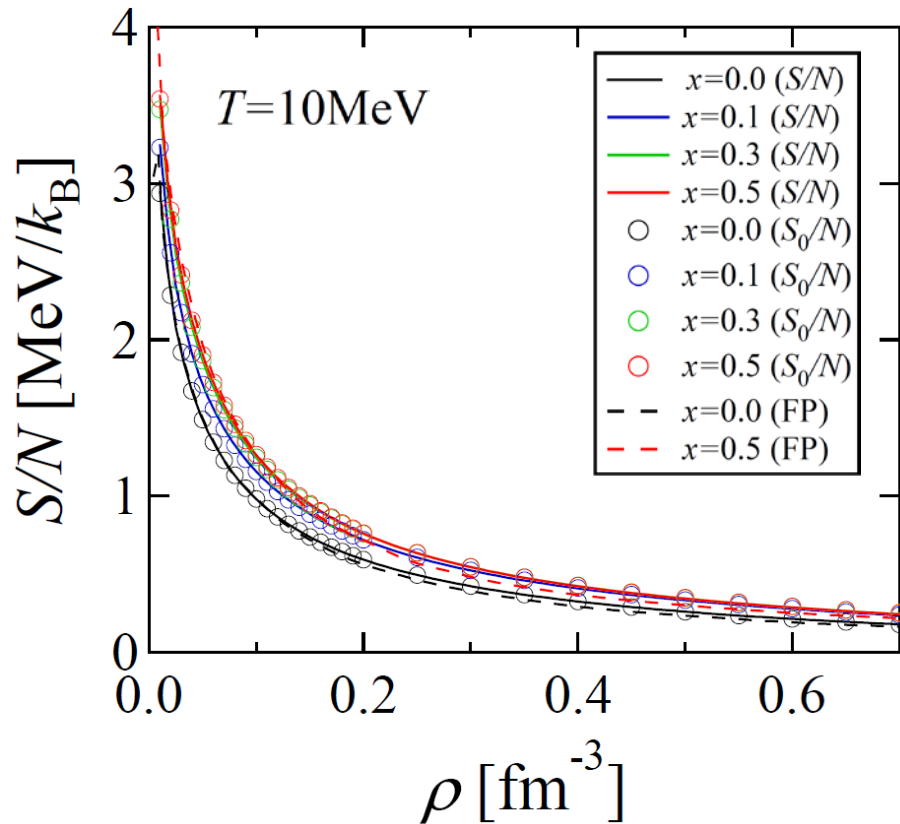
ρ_0 [fm ⁻³]	E_0 [MeV]	K [MeV]	E_{sym} [MeV]
0.16	-16.1	250	30.0



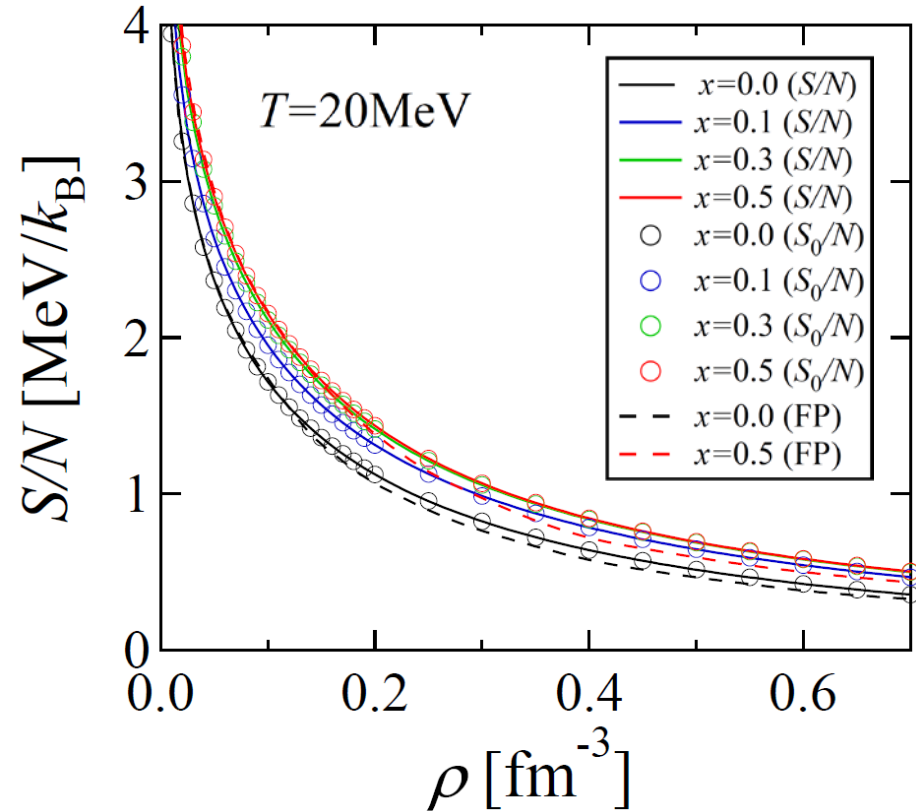
$T=20$ MeVにおける自由エネルギー

APR : A. Akmal, et al., PRC58(1998)1804.
 AM: A. Mukherjee, PRC 79(2009) 045811.

エントロピーと近似的エントロピー



$T=10\text{MeV}$ におけるエントロピー

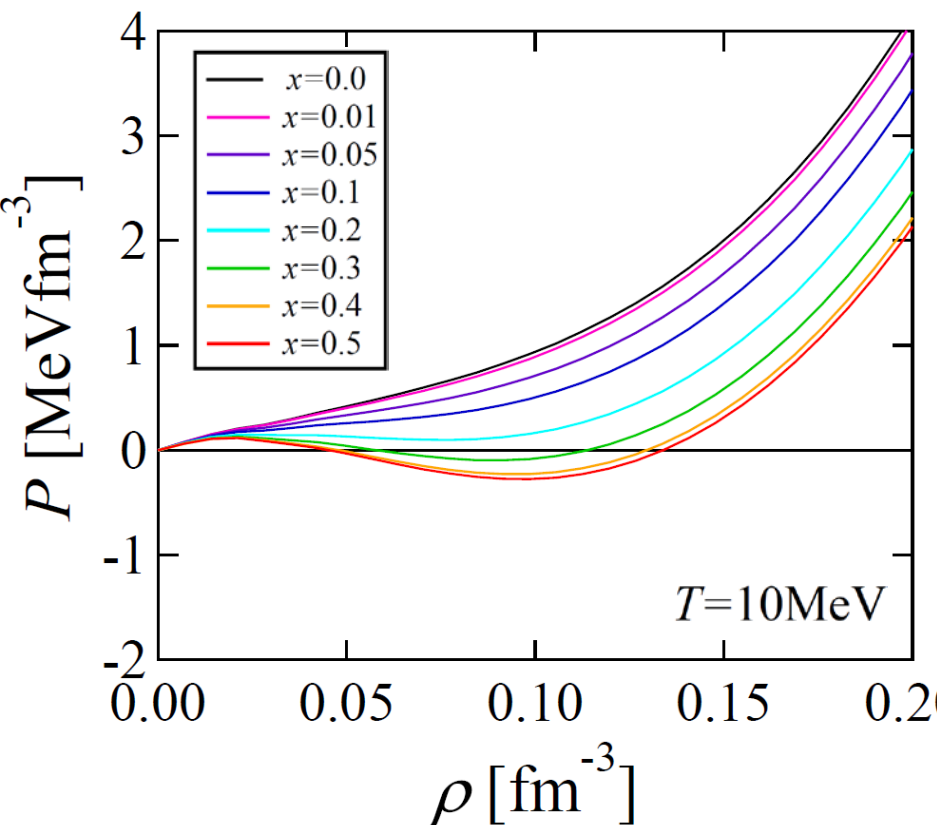


$T=20\text{MeV}$ におけるエントロピー

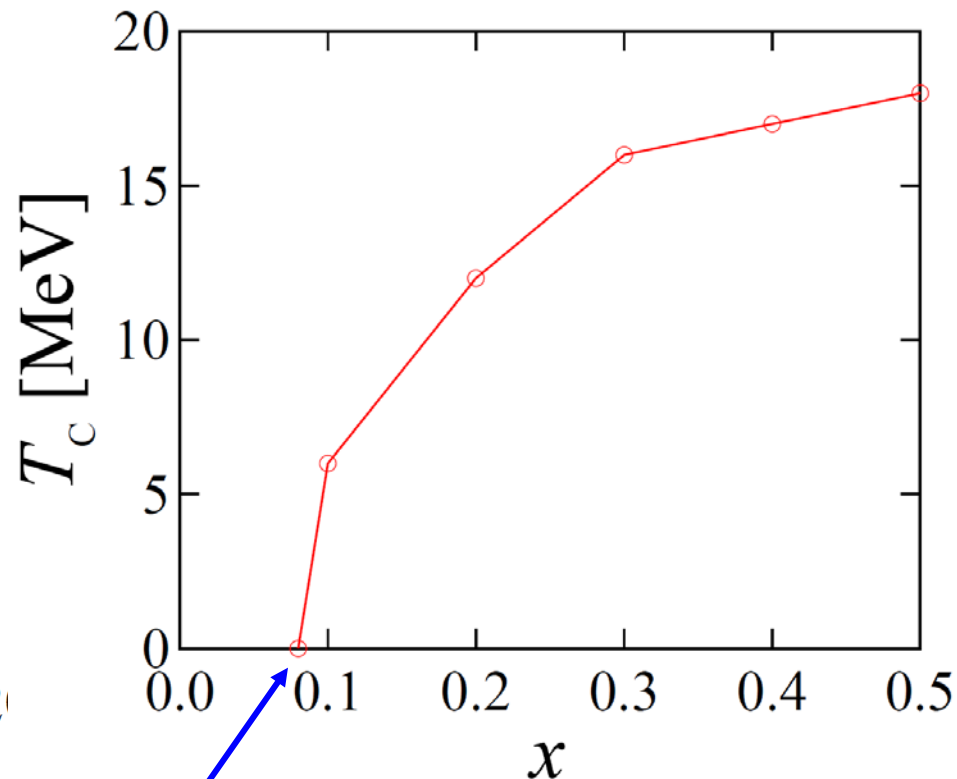
この変分法による数値計算はSelf Consistentである。

FP : B.Friedman and V. R. Pandharipande, NPA361(1981)502.

圧力と臨界温度



$T=10$ MeVにおける圧力



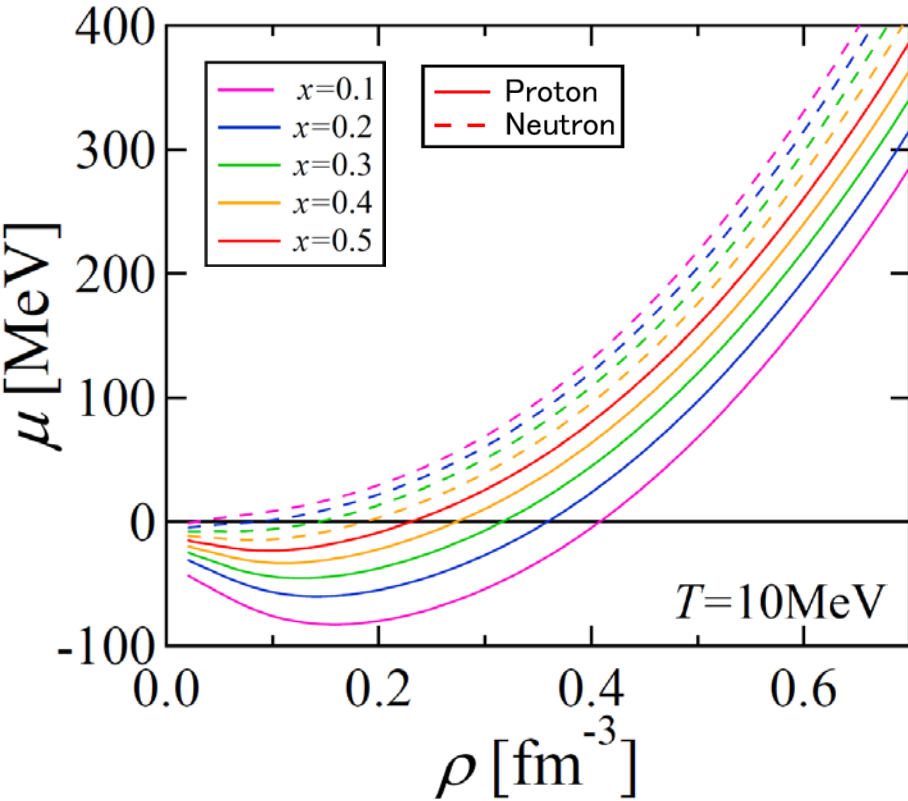
$x = 0.08$

臨界温度

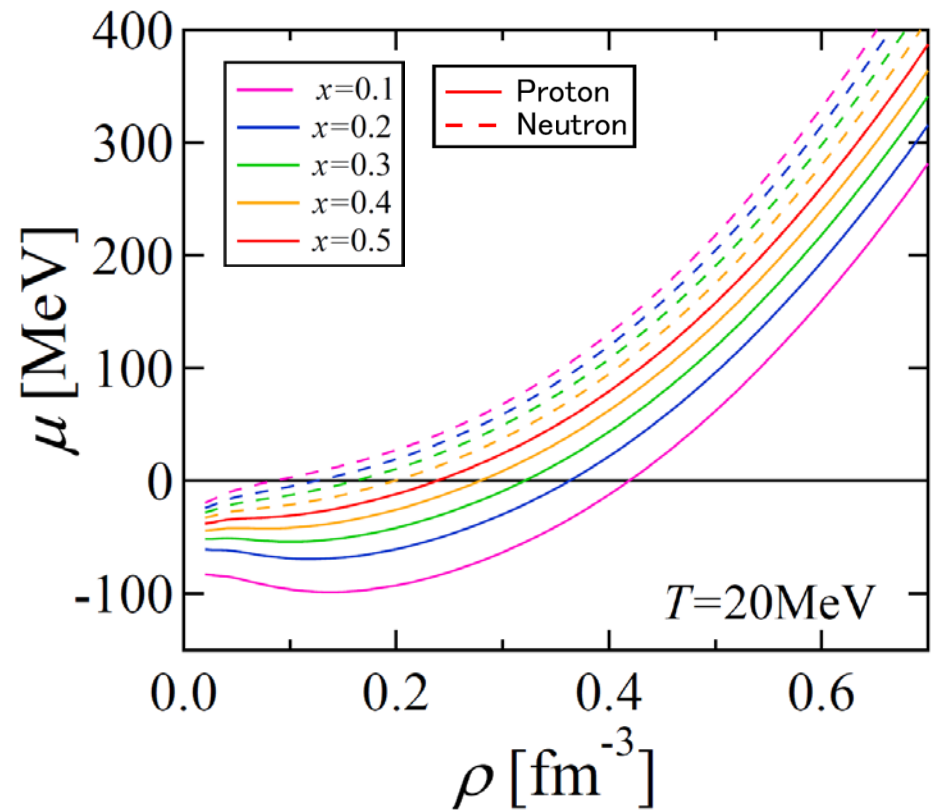
臨界温度 T_c

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{x, T=T_c} = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right|_{x, T=T_c} = 0$$

化学ポテンシャル



$T=10\text{MeV}$ における化学ポテンシャル



$T=20\text{MeV}$ における化学ポテンシャル

IV: 現在苦勞している点

密度、温度、陽子混在度に対する大まかなEOSは作成できた。

TF計算を行うためには、一様核物質の細かいデータが必要となる！

Shen EOSの場合

一様核物質について、以下の領域をカバーするtableを作る。

密度 ρ : $10^{-5} \bullet \rho \bullet 0.16 \text{ fm}^{-3}$ 871 point

温度 T : $0 \bullet T \bullet 15 \text{ MeV}$ 24 point

陽子混在度 x : $0.0 \bullet x \bullet 0.5$ 1001 point

そして、最終的なSN-EOS table では・・・

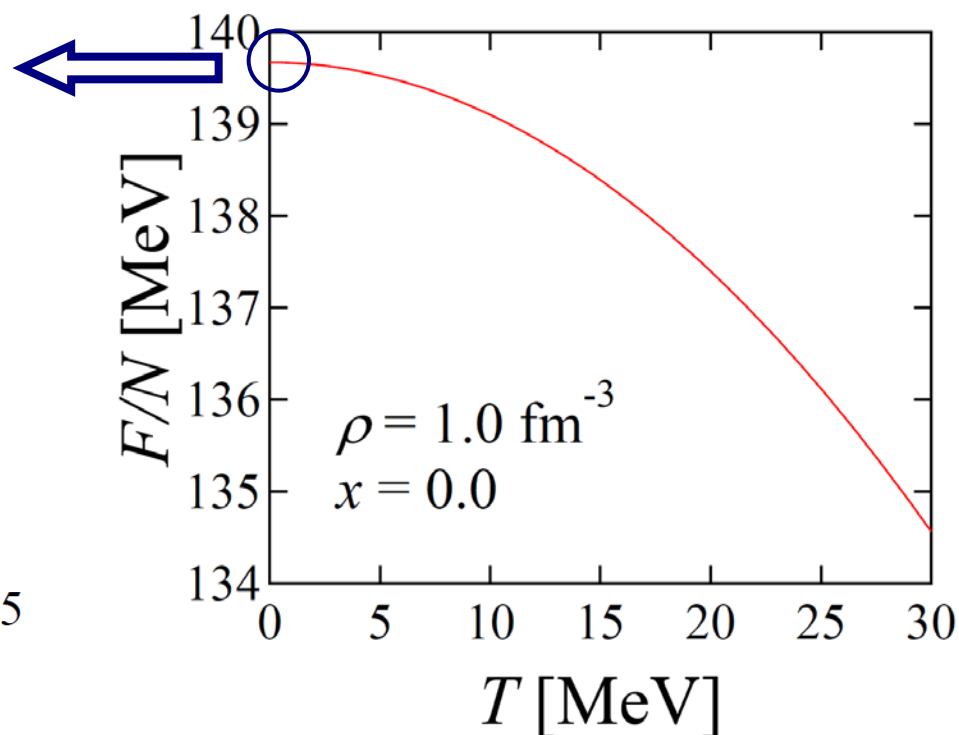
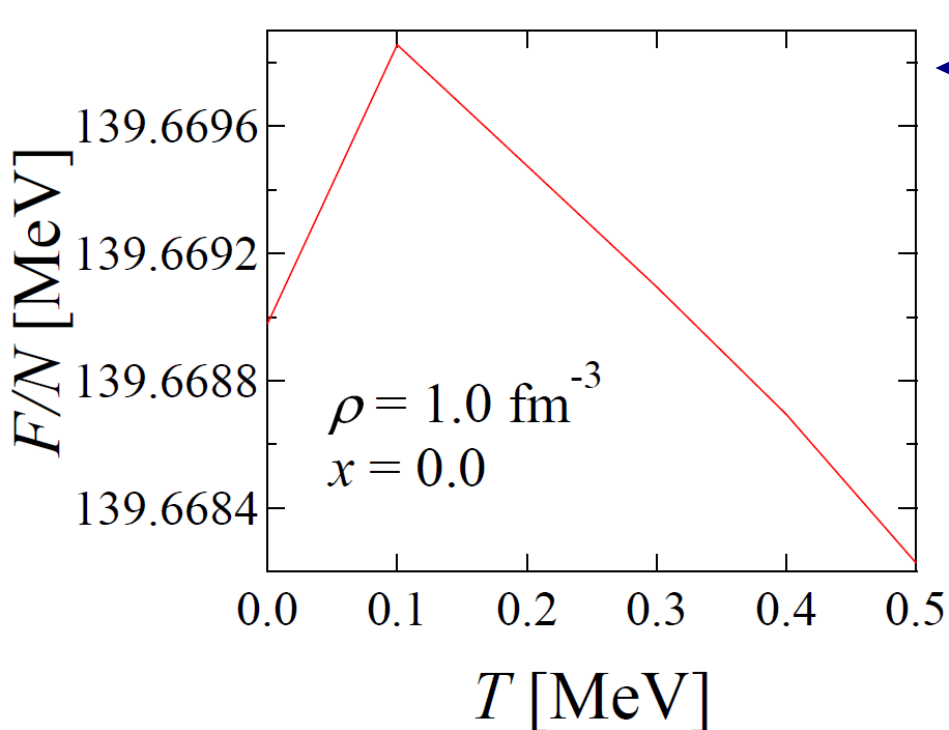
密度 ρ : $10^{5.1} \bullet \rho_{\text{m}} \bullet 10^{15.4} \text{ g/cm}^3$

温度 T : $0 \bullet T \bullet 100 \text{ MeV}$

陽子混在度 x : $0 \bullet x \bullet 0.56$

現在の問題点

問題点: 極低温と絶対零度で自由エネルギーが滑らかに接続しない!



低い陽子混在度 (0.0 ● x ● 0.1)

高密度 (0.75 ● ρ ● 1.50 fm⁻³)

このような領域で見られる。

有限温度における自由エネルギーの計算を改善する必要がある!

二体クラスター近似によるエネルギー表式

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{N}(\rho, x) = & E_1 + 2\pi\rho \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 \int_0^\infty r^2 dr \left[F_{ts}^\mu(r) V_{Cts}(r) + s F_{Tt}^\mu(r) V_{Tt}(r) \right. \\ & \left. + s F_{SOt}^\mu(r) V_{SOt}(r) + F_{qLts}^\mu(r) V_{qLts}(r) + s F_{qSOt}^\mu(r) V_{qSOt}(r) \right] \\ & + 2\pi\rho \frac{\hbar^2}{m} \sum_{t=0}^1 \sum_{\mu} \sum_{s=0}^1 \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \left[\frac{df_{Cts}^\mu(r)}{dr} \right]^2 + 8s \left[\frac{df_{Tt}^\mu(r)}{dr} \right]^2 + 48s \left[\frac{f_{Tt}^\mu(r)}{r} \right]^2 \right\} F_{Fts}^\mu(r) + \frac{2}{3} s \left[\frac{df_{SOt}^\mu(r)}{dr} \right]^2 F_{qFts}^\mu(r) \end{aligned}$$

$$F_{ts}^\mu(r) = \left\{ [f_{Cts}^\mu(r)]^2 + 8s [f_{Tt}^\mu(r)]^2 \right\} F_{Fts}^\mu(r) + \frac{2}{3} s [f_{SOt}^\mu(r)]^2 F_{qFts}^\mu(r)$$

$$F_{Tt}^\mu(r) = 16 f_{Tt}^\mu(r) [f_{Ct1}^\mu(r) - f_{Tt}^\mu(r)] F_{Ft1}^\mu(r) - \frac{2}{3} s [f_{SOt}^\mu(r)]^2 F_{qFt1}^\mu(r)$$

$$F_{SOt}^\mu(r) = \left\{ \frac{4}{3} f_{SOt}^\mu(r) [f_{Ct1}^\mu(r) - f_{Tt}^\mu(r)] - \frac{1}{3} [f_{SOt}^\mu(r)]^2 \right\} F_{qFt1}^\mu(r) - 24 [f_{Tt}^\mu(r)]^2 F_{Ft1}^\mu(r)$$

$$F_{qLts}^\mu(r) = 48s [f_{Tt}^\mu(r)]^2 F_{Fts}^\mu(r) + \left\{ [f_{Cts}^\mu(r)]^2 + 8s [f_{Tt}^\mu(r)]^2 \right\} F_{qFts}^\mu(r) + \frac{2}{3} s [f_{SOt}^\mu(r)]^2 F_{bFts}^\mu(r)$$

$$\begin{aligned} F_{qSOt}^\mu(r) = & 72 [f_{Tt}^\mu(r)]^2 F_{Ft1}^\mu(r) + \left\{ \frac{2}{3} [f_{Ct1}^\mu(r)]^2 - \frac{4}{3} f_{Ct1}^\mu(r) f_{Tt}^\mu(r) - \frac{2}{3} f_{Ct1}^\mu(r) f_{SOt}^\mu(r) \right. \\ & \left. + \frac{20}{3} [f_{Tt}^\mu(r)]^2 + \frac{8}{3} f_{Tt}^\mu(r) f_{SOt}^\mu(r) \right\} F_{qFt1}^\mu(r) + \frac{2}{3} [f_{SOt}^\mu(r)]^2 F_{bFt1}^\mu(r) \end{aligned}$$

有限温度における k 積分を含む表式(中性子物質)

一体の運動エネルギー

$$E_1 = \frac{\hbar}{2m} \frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) k^4 dk$$

フェルミ気体の動径分布関数

$$\begin{aligned} F_{F1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_F^\dagger P_{1s12}^- \Phi_F d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ 1 + (-1)^s \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) j_0(kr) k^2 dk \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{qF1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_F^\dagger |\mathbf{L}_{12}|^2 P_{1s12}^- \Phi_F d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ \frac{1}{3\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) k^4 r^2 dk - (-1)^s \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) j_0(kr) k^2 dk \right] \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) j_1(kr) r k^3 dk \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{bF1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_F^\dagger |\mathbf{L}_{12}|^4 P_{1s12}^- \Phi_F d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ \frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) \left(\frac{2}{3} k^4 r^2 + \frac{1}{15} k^6 r^4 \right) dk + \left[\frac{1}{3\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) k^4 r^2 dk \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + (-1)^s \left\{ \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) j_1(kr) r k^3 dk \right]^2 - \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) j_0(kr) k^2 dk \right] \left[\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^\infty n_n(k) [j_0(kr) r^2 k^4 - j_1(kr) r k^3] dk \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

絶対零度における k 積分を含む表式(中性子物質)

一体の運動エネルギー

$$E_1 = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_{\text{Fn}}^2}{2m}$$

フェルミ気体の動径分布関数

$$\begin{aligned} F_{\text{F}1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_{\text{F}}^\dagger P_{1s12}^- \Phi_{\text{F}} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ 1 + (-1)^s \left[3 \frac{j_1(k_{\text{Fn}} r)}{k_{\text{Fn}} r} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{qF}1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_{\text{F}}^\dagger |\mathbf{L}_{12}|^2 P_{1s12}^- \Phi_{\text{F}} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ \frac{(k_{\text{Fn}} r)^2}{5} - (-1)^s 9 j_2(k_{\text{Fn}} r) \frac{j_1(k_{\text{Fn}} r)}{k_{\text{Fn}} r} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{bF}1s}^-(r) &= \Omega^2 \sum_{\text{isospin}} \sum_{\text{spin}} \int \Phi_{\text{F}}^\dagger |\mathbf{L}_{12}|^4 P_{1s12}^- \Phi_{\text{F}} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{2s+1}{4} \left\{ \frac{2}{5} (k_{\text{Fn}} r)^2 + \frac{12}{175} (k_{\text{Fn}} r)^4 + (-1)^s 9 \left[j_1(k_{\text{Fn}} r) j_3(k_{\text{Fn}} r) + [j_2(k_{\text{Fn}} r)]^2 - 2 \frac{j_1(k_{\text{Fn}} r) j_2(k_{\text{Fn}} r)}{k_{\text{Fn}} r} \right] \right\} \end{aligned}$$

すべて解析的に表すことができる！

有限温度における自由エネルギーの計算手順

バリオン数密度 ρ_B , 温度 T , 陽子混在度 Y_p を入力

有効質量 m_i^* を固定

$E_1/N, F_{\text{Fts}}^\mu(r), F_{\text{qFts}}^\mu(r), F_{\text{bFts}}^\mu(r)$ の計算
(フーリエ変換部分の計算)

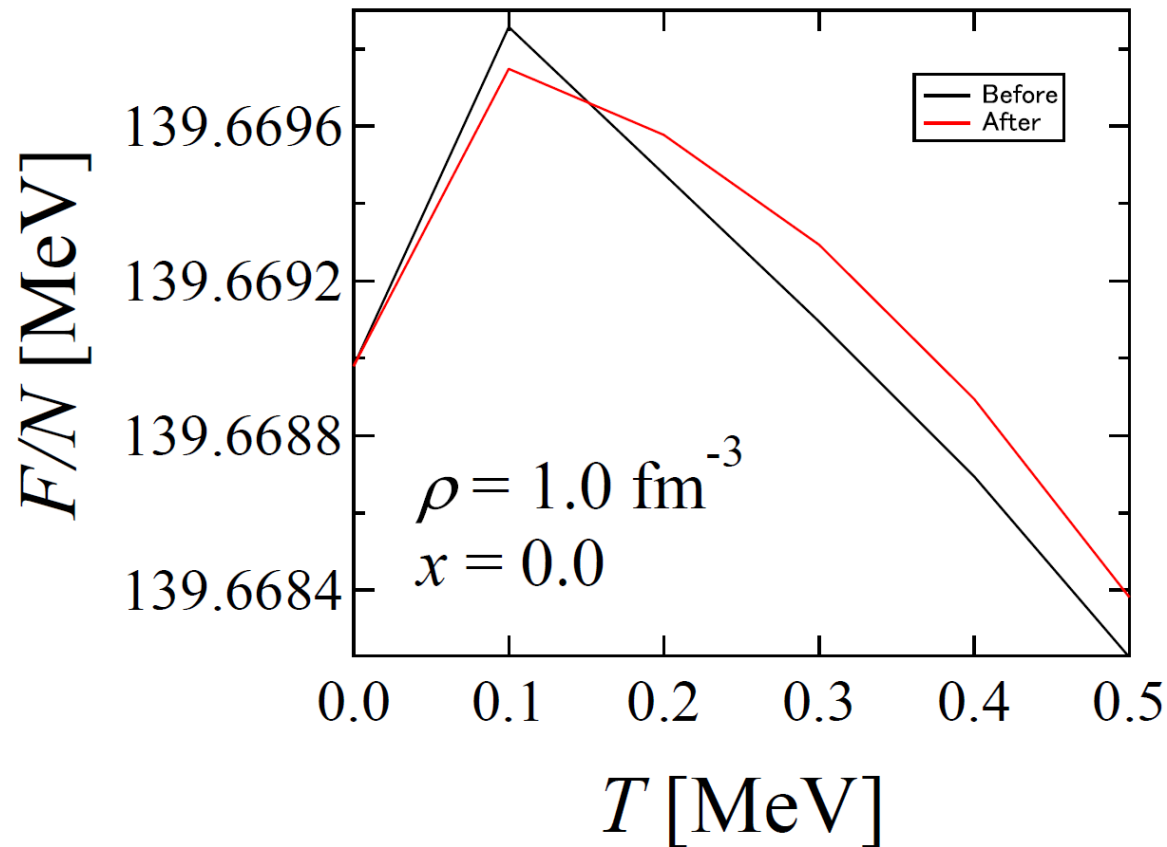
E_2/N を求めるための r 積分

有効質量 m_i^* での最小化

F/N が決定

絶対零度の f_{ij}

k -spaceでの積分の精密化の結果



今までに比べて、
0MeVと0.1MeVの
自由エネルギーの
差は減少した。

しかしながら、不連続性は改善されていない。

そこで、 r -spaceでの積分の精度を上げてみる!!

絶対零度におけるエネルギーの計算手順

バリオン数密度 ρ_B , 陽子混在度 Y_p を入力

r を固定して...

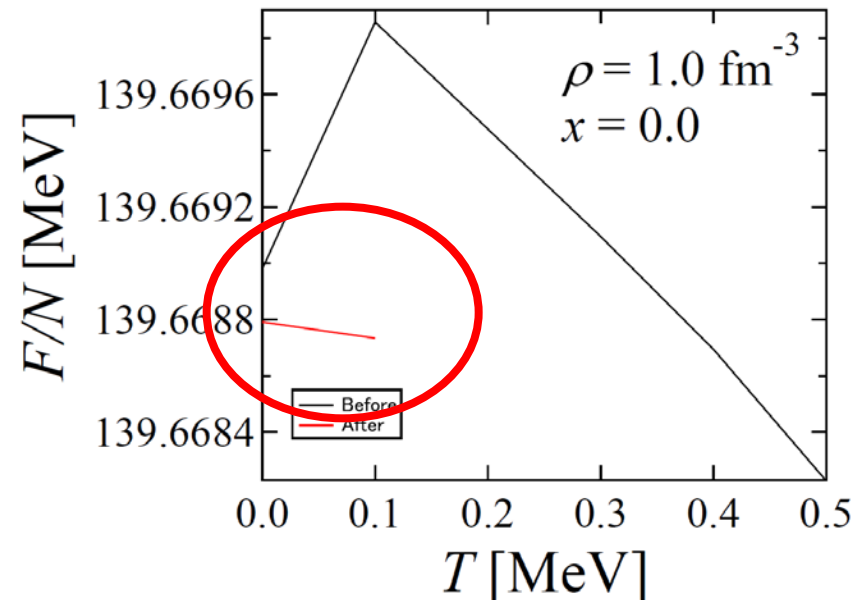
Eular-Lagrange方程式を解き、 f_{ij} を決定する

E_2/N を求めるための r 積分

E_2/N が決定

r 積分の精度を上げて
数値計算を試みた。

その結果、今までの場合に
比べて大きく改善された!



r -spaceでの積分精度の向上によって改善されそう...

まとめ

- 絶対零度及び有限温度における一様非対称核物質の状態方程式を作成している。

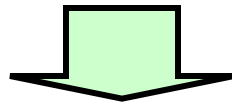
TF計算のために、一様核物質の自由エネルギーtableが必要！！

Tableを完備するためには・・・

- k -spaceの積分精度を上げることによる改善は十分ではなかった。
- r -spaceでの積分精度も向上させれば、改善ができそうだが、計算時間がかかってしまう。

今後の課題

- 数値計算精度、速度の改良
- TF計算のための一様核物質状態方程式テーブルの完成



超新星爆発シミュレーションのためのEOSの作成