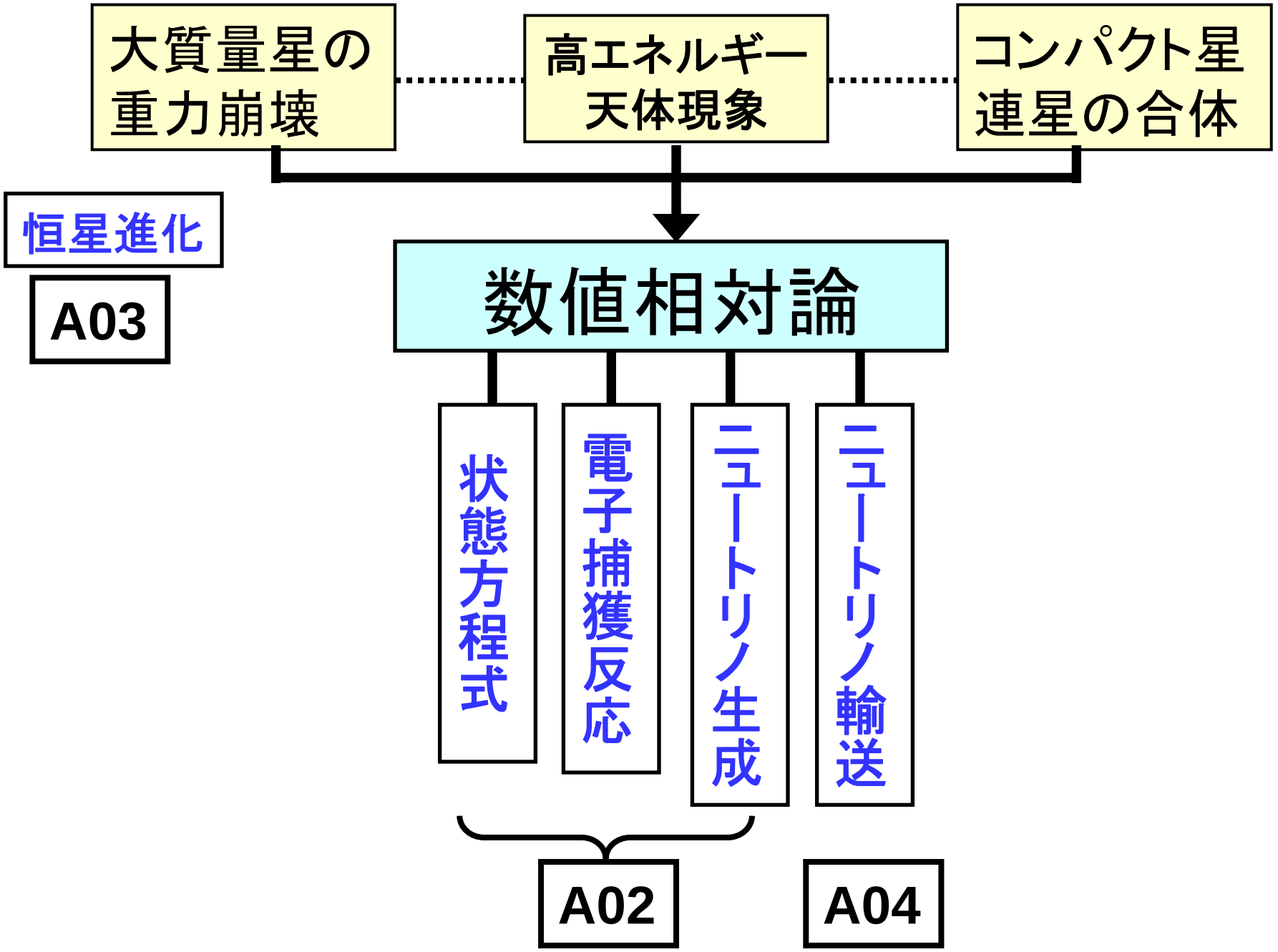
「Numazu Workshop 2009」

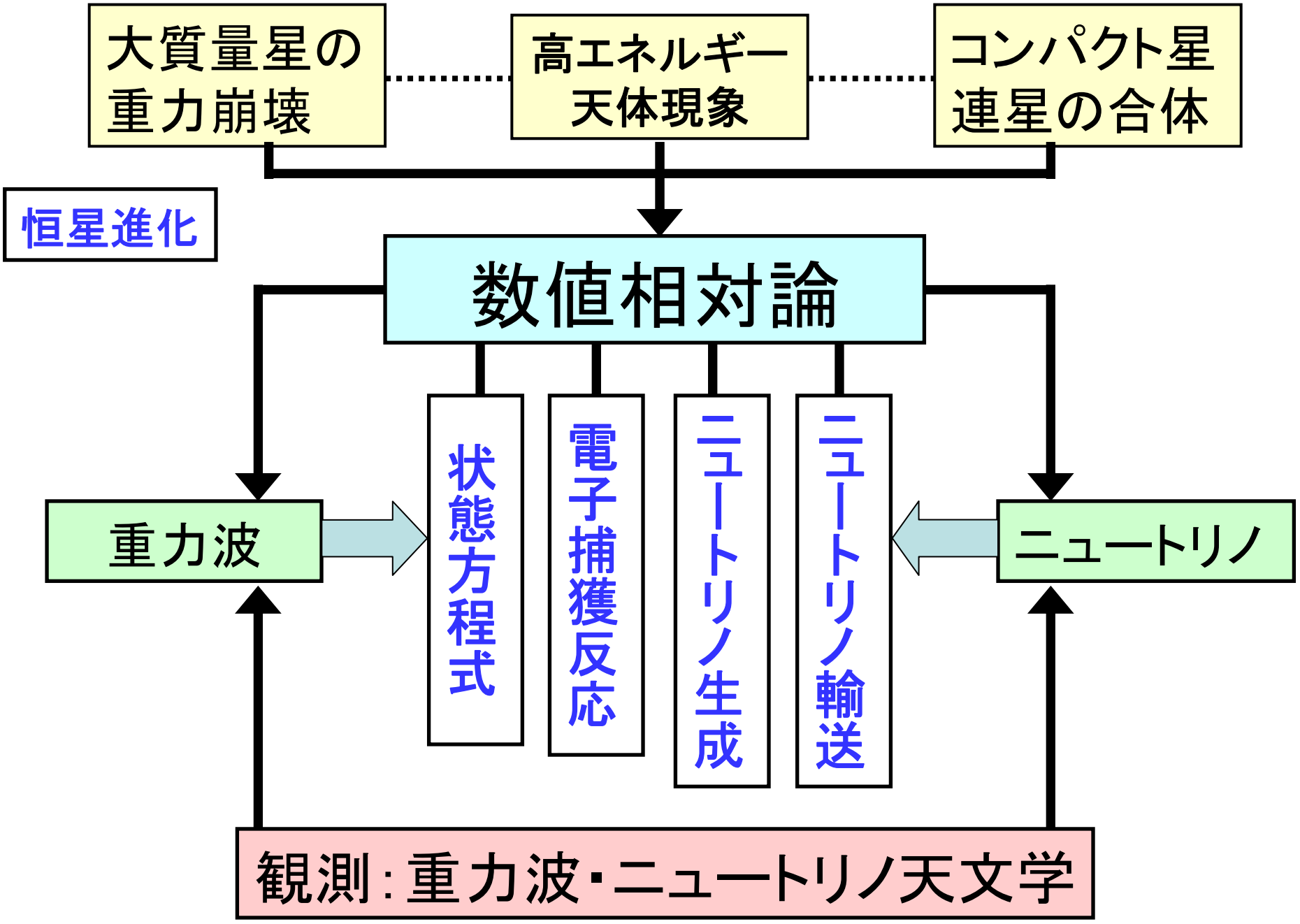
微視的物理を考慮した数値相対論コード

国立天文台　理論研究部

関口　雄一郎

共同研究者：　柴田大(京大基研)、 木内健太(早稲田大)
谷口敬介(UWM)、 瓜生康史(琉球大)

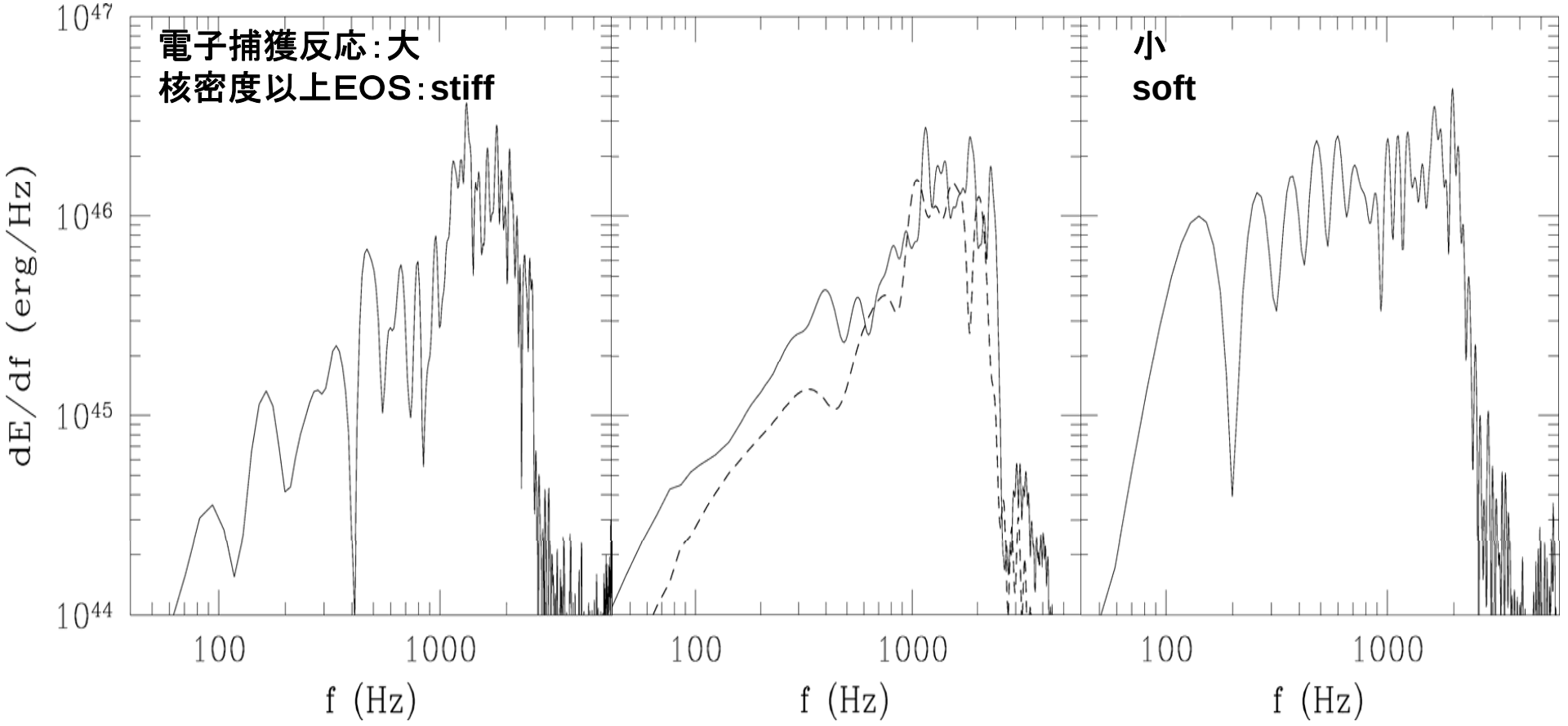

大質量星の
重力崩壊
高エネルギー
天体現象
コンパクト星
連星の合体
恒星進化
A03
数値相対論
状態方程式
電子捕獲反応
ニュートリノ生成
ニュートリノ輸送
A02
A04


大質量星の
重力崩壊
高エネルギー
天体現象
コンパクト星
連星の合体
恒星進化
数値相対論
状態方程式
電子捕獲反応
ニュートリノ生成
ニュートリノ輸送
重力波
ニュートリノ
観測：重力波・ニュートリノ天文学

A02
A03

微視的物理と重力波

大質量星の重力崩壊における、コアバウンスからの重力波

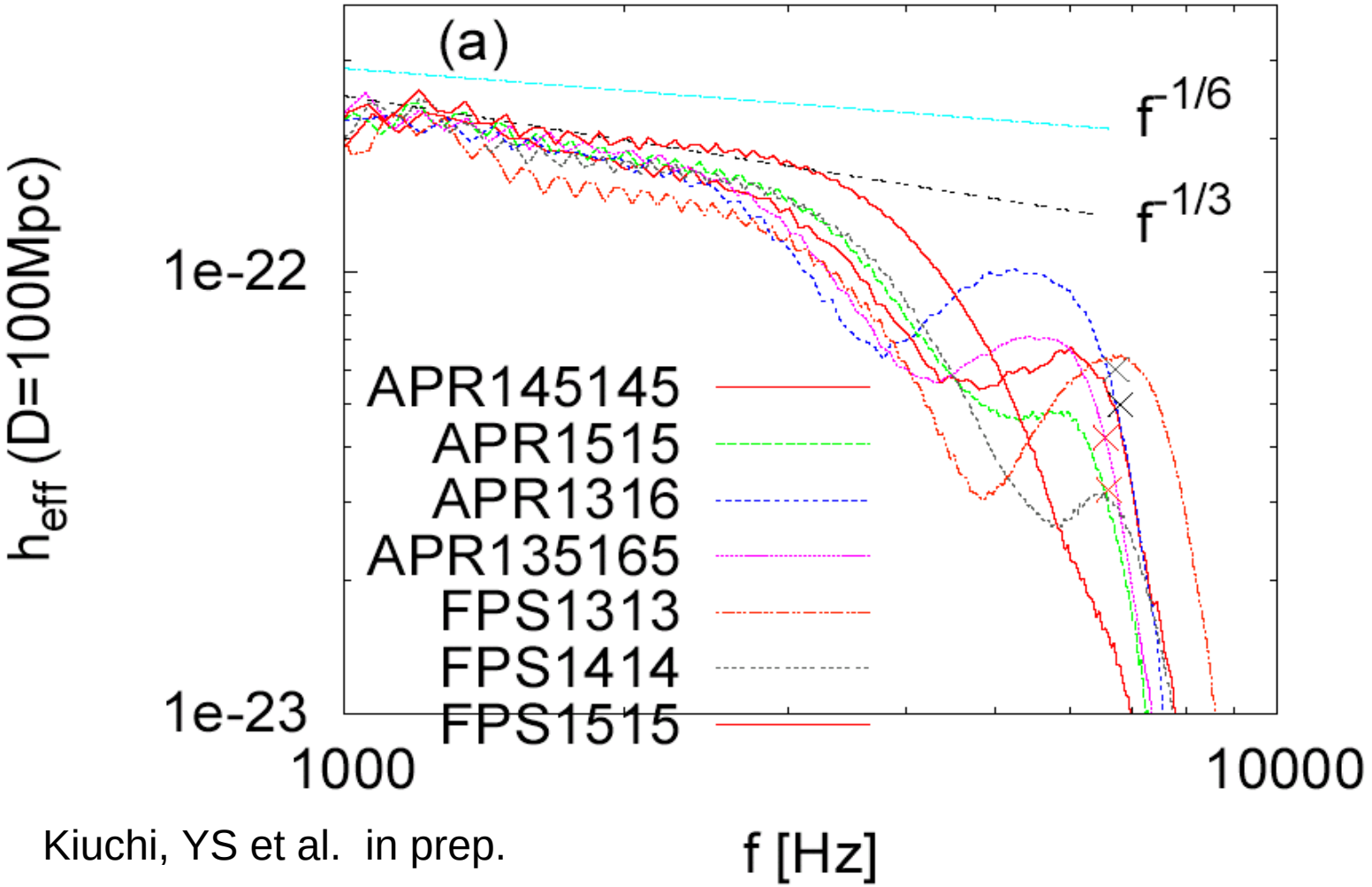


YS & M. Shibata (2005)

A02
A03

微視的物理と重力波

中性子星連星の合体による、BH形成からの重力波

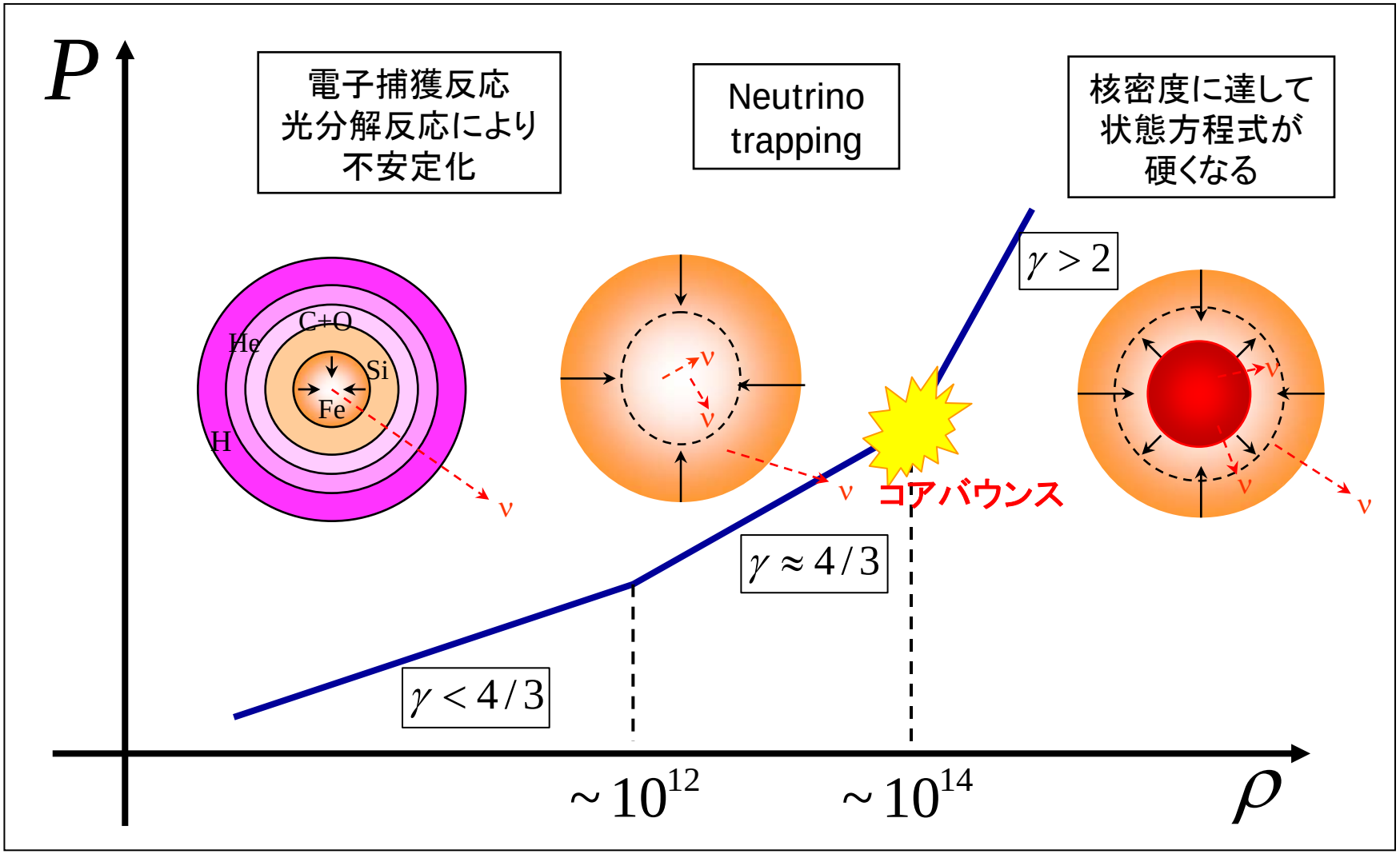


Kiuchi, YS et al. in prep.

目次

- 超新星爆発 primer
- GRの重要性
- GRコードの現状
- （共同）研究
- まとめ

SN mechanism (Infall ~ Bounce)



SN mechanism (shock stall)

- 衝撃波はその伝播とともにエネルギーを失う

$$E_{\rm shock} = E_{\rm shock,init} + \int L_{\rm hydro} dt - \int (L_{\rm photo} + L_\nu) dt$$

$$E_{\rm shock,init} \sim 3\times 10^{51}\,{\rm erg} \left(\frac{M_{\rm core}}{M_{\rm solar}}\right)^{2} \left(\frac{R_{\rm core}}{10{\rm km}}\right)^{-1}$$

初期衝撃波エネルギー

$$L_{\rm hydro} \sim 10^{51}\,{\rm erg/s} \left(\frac{\rho_{\rm shock}}{10^{9}\,{\rm g/cm^3}}\right) \left(\frac{M_{\rm core}}{M_{\rm solar}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{R_{\rm shock}}{100{\rm km}}\right)^{\frac{1}{2}} \propto R^{\frac{1}{2}}$$

Shock dissipation

$$L_{\rm photo} \sim 10^{52}\,{\rm erg/s} \left(\frac{\rho_{\rm shock}}{10^{9}\,{\rm g/cm^3}}\right) \left(\frac{M_{\rm core}}{M_{\rm solar}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\rm shock}}{100{\rm km}}\right)^{\frac{3}{2}} \propto R^{\frac{3}{2}}$$

Photo-dissociation

$$L_\nu \sim 10^{52}\,{\rm erg/s} \left(\frac{\rho_{\rm shock}}{10^{9}\,{\rm g/cm^3}}\right) \left(\frac{kT}{4{\rm MeV}}\right)^{6} \left(\frac{R_{\rm shock}}{100{\rm km}}\right)^{3}$$

Neutrino cooling

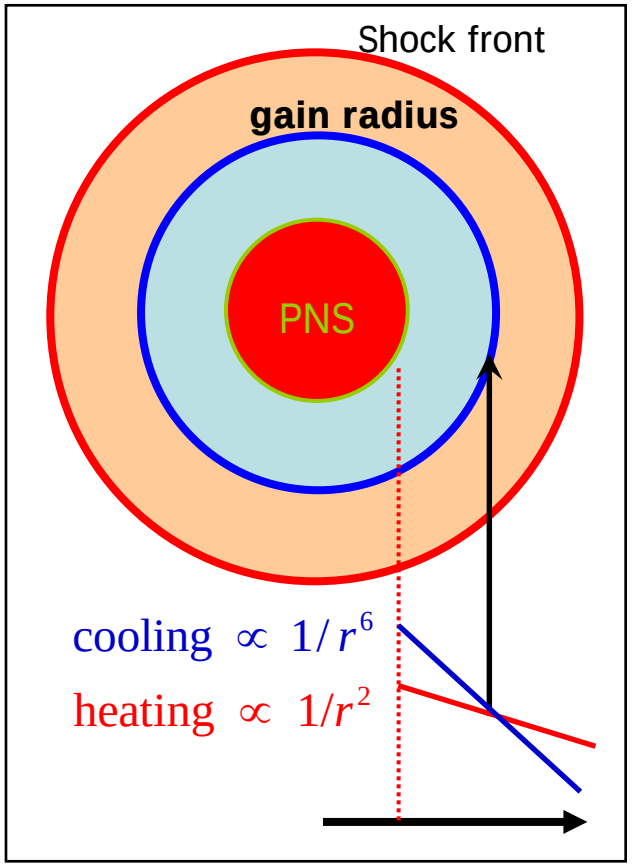
SN mechanism (neutrino heating)

- Neutrino cooling (electron capture) rate : $\propto T^6 \propto r^{-6}$
- Neutrino heating (neutrino capture) rate : $\propto L_\nu r^{-2} \propto r^{-2}$
  - cooling = heating となる「**gain radius**」の存在
  - gain radius と衝撃波面の間でheating
    (e.g. Janka et al. (2006) Phys. Rep. 442, 38)

$$L_{\nu,\mathrm{heat}} \sim 3\times10^{51}\,\mathrm{erg/s}\left(\frac{M_{\nu\text{-heated}}}{0.1M_\odot}\right)\left(\frac{L_\nu}{10^{53}\,\mathrm{erg/s}}\right)\left(\frac{\varepsilon_\nu}{15\mathrm{MeV}}\right)^2\left(\frac{r}{200\mathrm{km}}\right)^{-2}$$

  - Neutrino heating による shock revival (**Delayed explosion**)

Wilson (1985) in “Numerical Astrophysics”



SN mechanism (ν-driven SN)

- Delayed explosion 成功のために

$$t_{\rm heating} \sim \frac{GM_{\rm core}m_{\rm u}}{Q_\nu^+ r} \sim 25\,{\rm ms}\left(\frac{L_{\nu,{\rm sphere}}}{10^{53}{\rm erg/s}}\right)^{-1}\left(\frac{\varepsilon_\nu}{4{\rm MeV}}\right)^{-2}\left(\frac{M_{\rm core}}{M_{\rm solar}}\right)\left(\frac{r}{100{\rm km}}\right)^{-2}$$

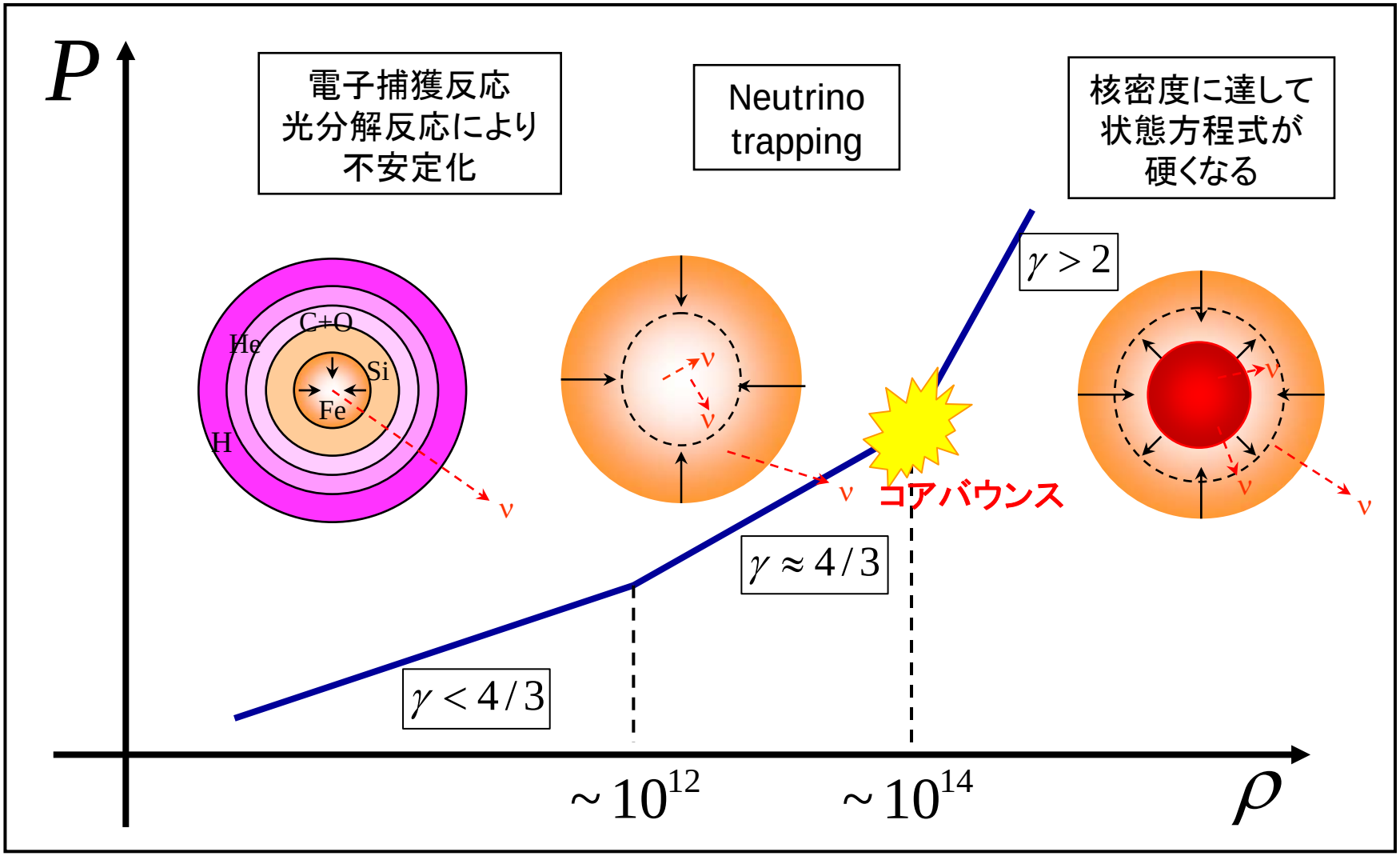
$t_{\rm adv}$：gain region に滞在する時間

- $t_{\rm heating} < t_{\rm adv}$ であることが必要
- **heating 効率を上げる** and/or **滞在時間を長くする**
  - $L_{\nu,{\rm sphere}}$，ε_ν を大きくする
  - **Advection time を長くする　対流？　SASI?**
- **多次元計算が必要**

Note: GRの重要性

- 電子捕獲反応・ν 冷却
- 高密度状態方程式
- 重力波

SN mechanism (Infall ~ Bounce)



A03
A02

温故知新

GENERAL RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS AND THE ADIABATIC COLLAPSE OF STELLAR CORES[1]

KENNETH A. VAN RIPER
Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign
Received 1978 September 18; accepted 1979 March 7

It is incorrect to conclude that GR corrections to the evolution will always be as small as R_g/R; because of the more restrictive dynamic stability criteria in GR the evolution can be substantially altered, even though the GR terms appear small. The critical adiabatic index in GR is greater than 4/3 by an amount that depends on how relativistic the star is.

$$\gamma_{\text{crit, GR}} = \frac{4}{3} + 2.78\frac{P}{\rho c^2} \sim \frac{4}{3} + 2.78 \times O(1)\frac{GM}{Rc^2}$$

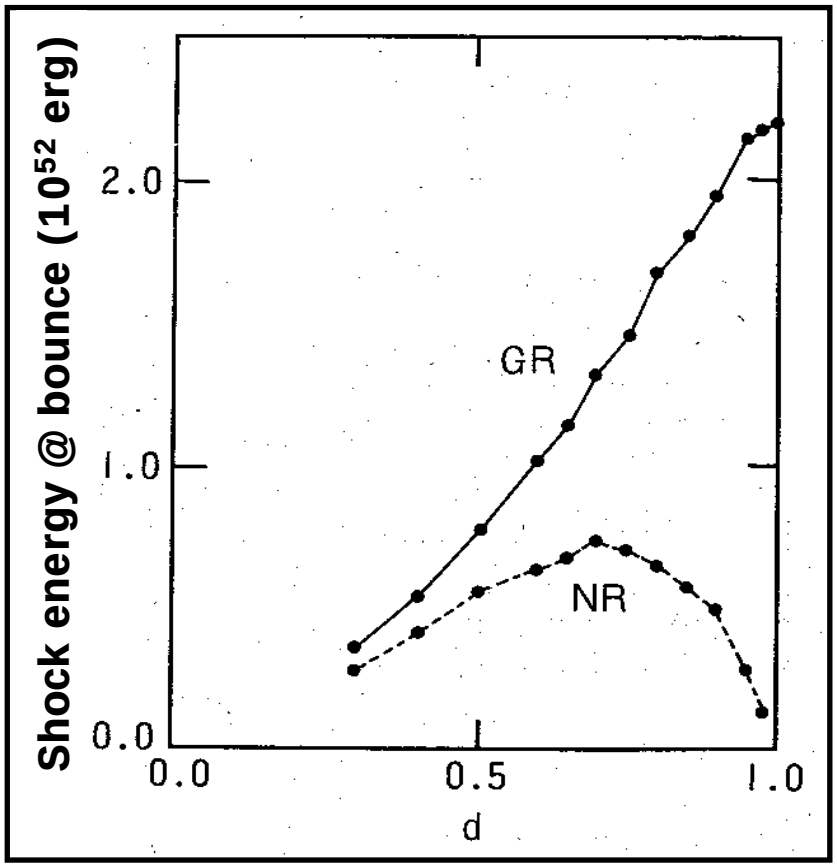
Chandrasekhar 1964, 1965

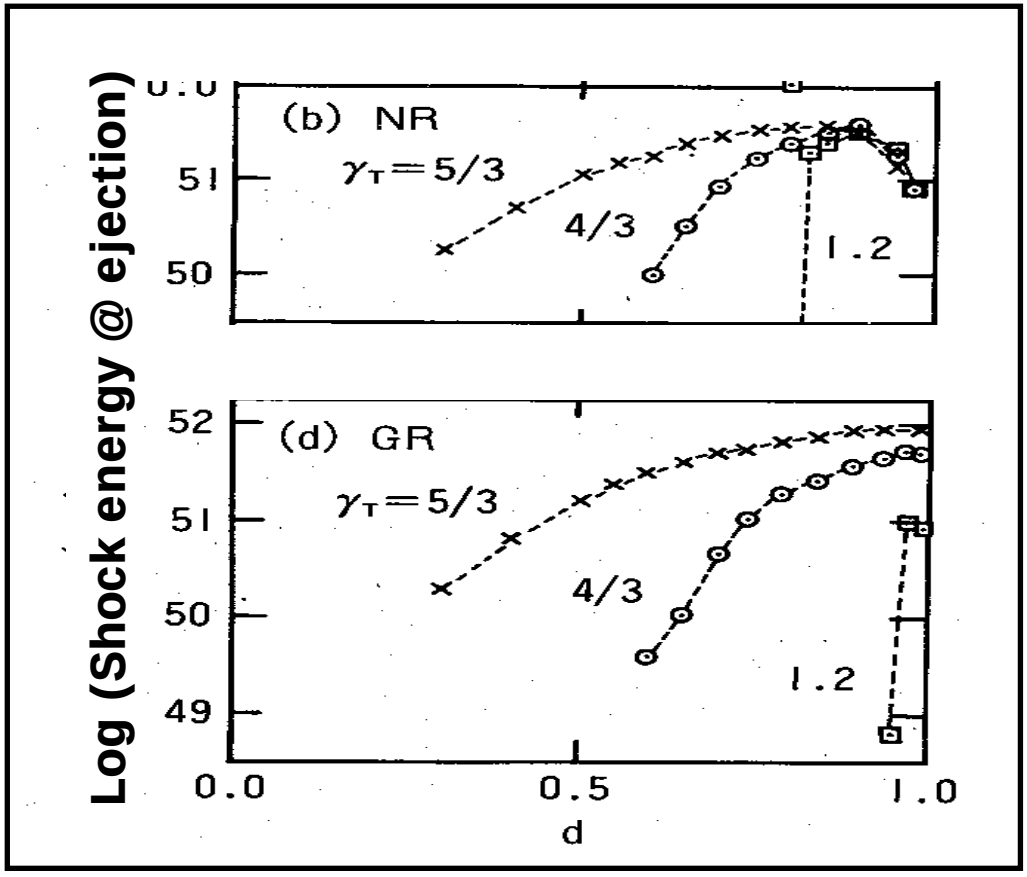
A03
A02

弱い相互作用

Takahara & Sato (1984) PTP 72, 978

$$d \sim \left(\frac{Y_{\mathrm{lepton,bounce}}}{Y_{\mathrm{lepton,init}}} \right)^{4/3} : \text{depends on weak rates (e - capture, } \nu \text{ - trapping)}$$





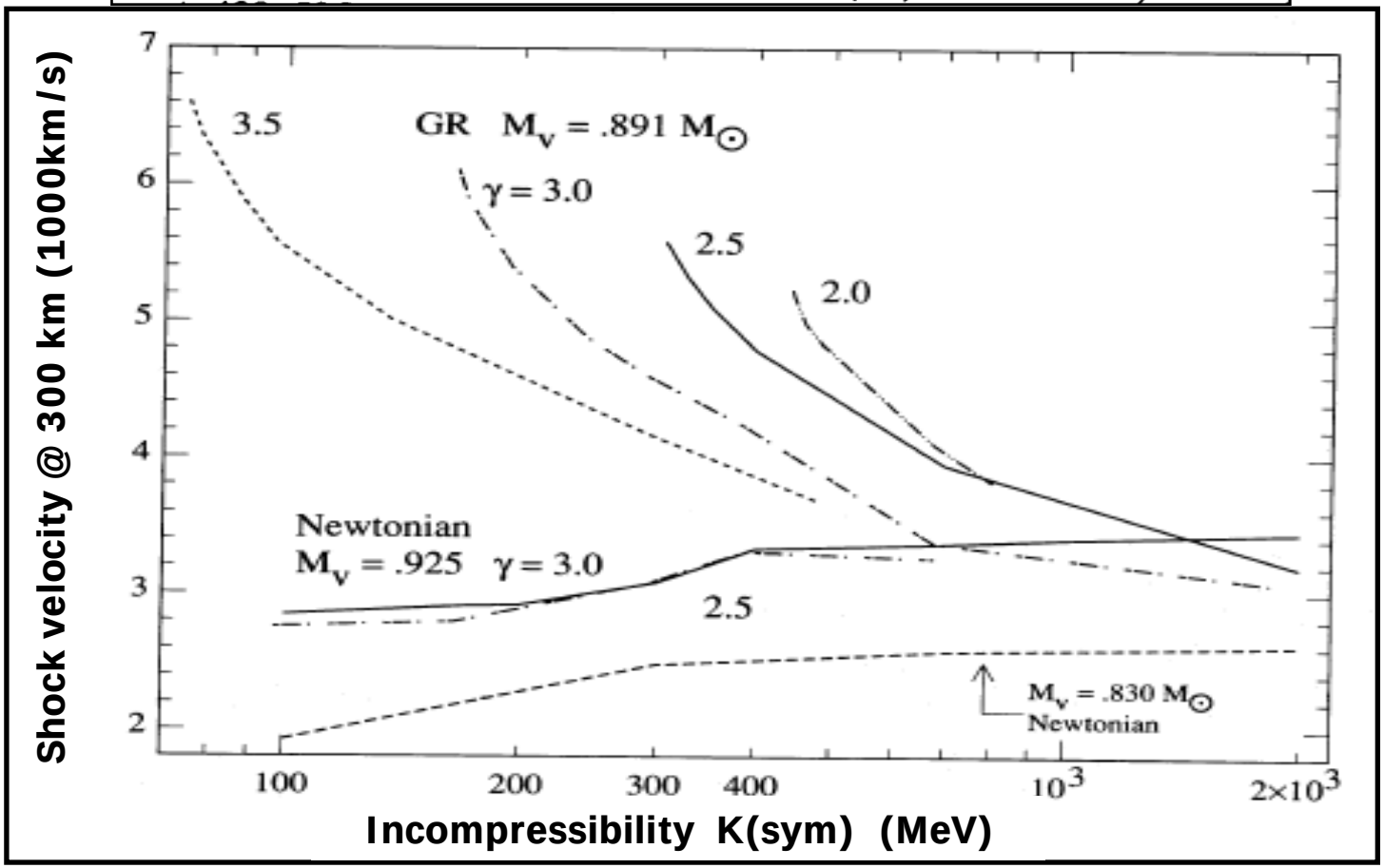
A03
A02

高密度状態方程式

Van Riper (1988) ApJ 326, 235

$$P_n = K\rho_0[(\rho/\rho_0)^\gamma - 1]/9\gamma \text{ MeV fm}^{-3}$$

Kolehmainen, K., Prakash, M., Lattimer, J., and Treiner, J. 1985,

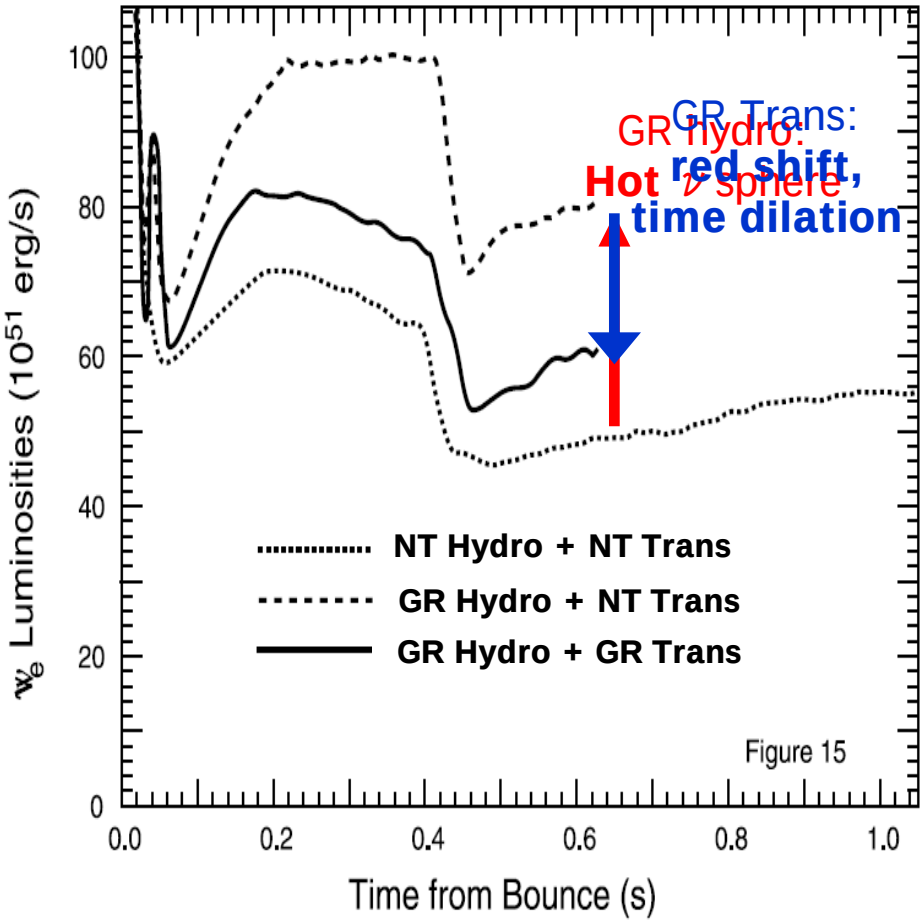


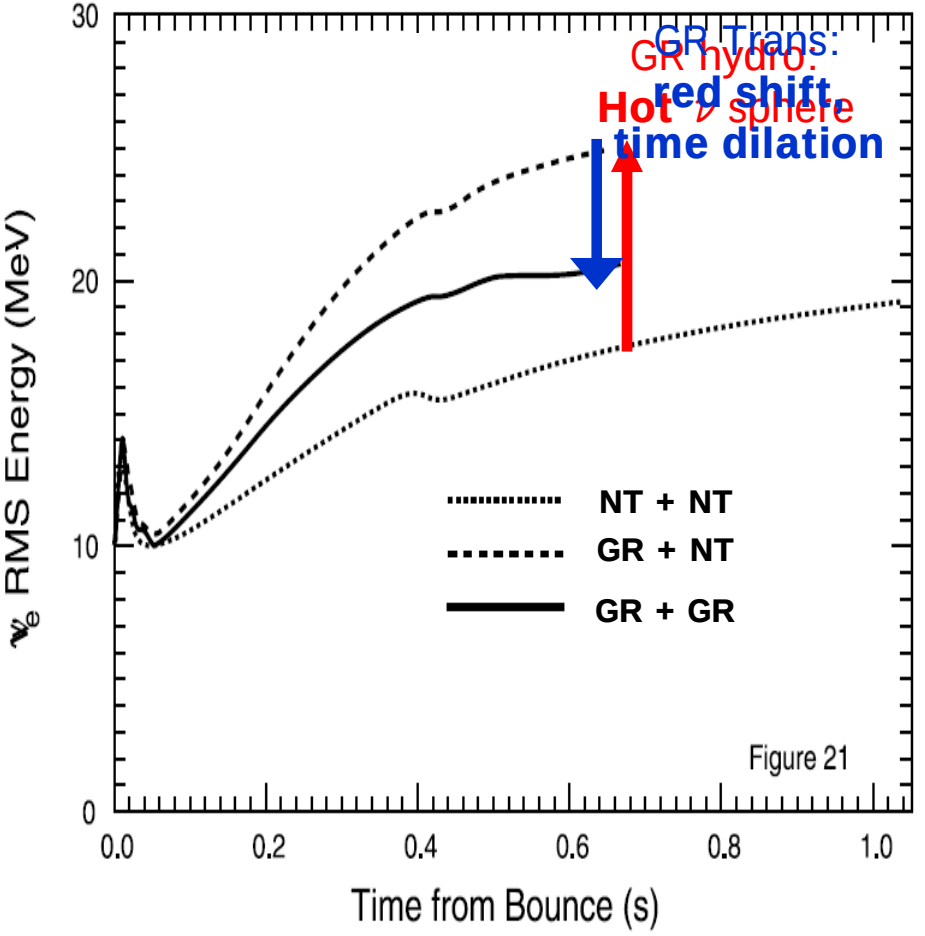
A03
A02

ニュートリノ

Bruenn et al. (2001) ApJ 560, 326

$$\nu\text{-heating rate} \propto L_{\nu,\mathrm{sphere}}\varepsilon_{\nu}^{2}$$



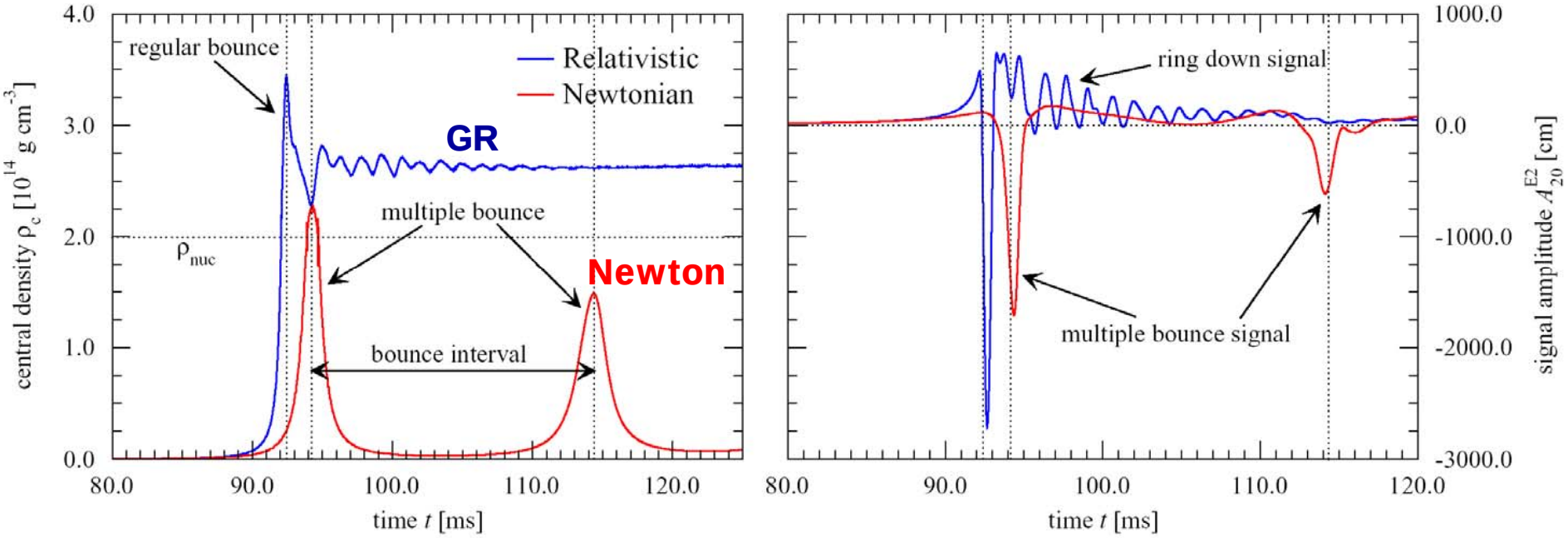


A03

重力波

Dimmelmeier et al (2002) A&A 393, 523

- 回転重力崩壊におけるコアバウンス時の重力波



J保存で遠心力：γ_{eff} = 5/3 ⇒ Newtonian では安定
GRでは崩壊ダイナミクスが大きく異なる場合がある

重力波波形の精確な計算のためにはGRは重要

GR コードの現状

- 現コードのまとめ
- どんなことができるか？

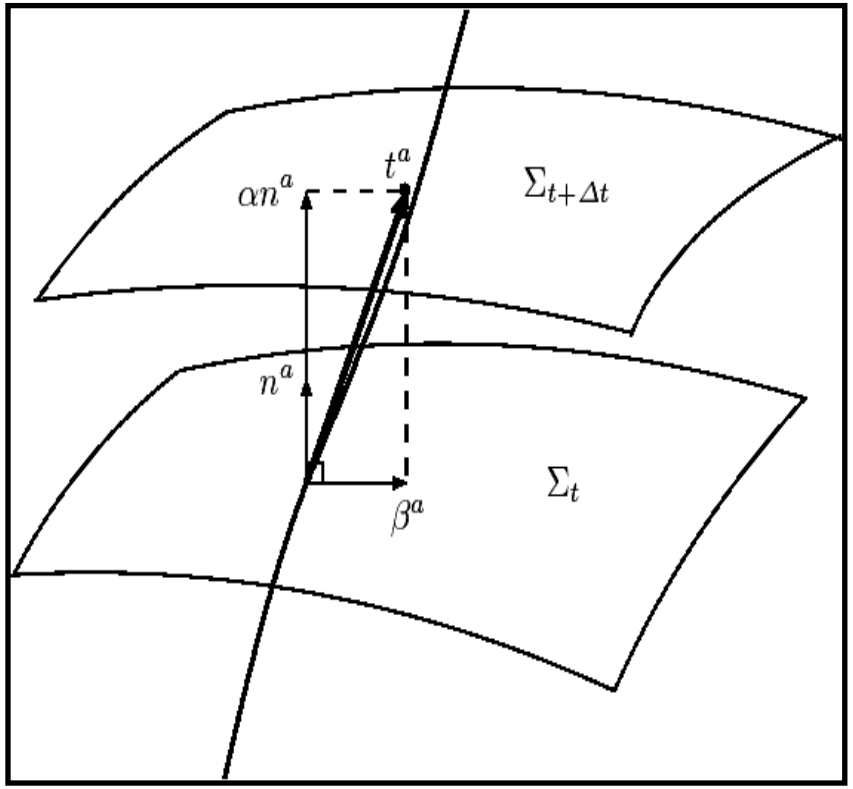
数値相対論

- 解き明かしたい重力現象
  - 強重力場(非線形性)での一般相対論のテスト
    - ブラックホール形成の瞬間
    - 重力波放出
      - 強重力場高密度物質の情報を運ぶ
      - コンパクト連星系の合体, 重力崩壊, コンパクト星の振動
  - 高エネルギー天体現象(small δ t implies compact source)
    - γ 線バースト, 超新星, etc
- 理論に基づく予言 ⇔ 観測
- Einstein 方程式：非線形偏微分方程式
  - 解析解の構成が困難
    - 時空に高い対称性，簡単な物質場の記述
  - 動的時空を近似することなく数値的に解く

数値相対論

- $(M,\ g_{ab}) \Rightarrow (\Sigma_t,\ \gamma_{ab},\ K_{ab})$
  - Spacelike foliation Σ_t characterized by a closed one form Ω_a on M
    - normalized one form :
      $\omega_a = \alpha\Omega_a,\ (\alpha^{-2} = -g_{ab}\Omega_a\Omega_b)$
    - unit normal vector to Σ_t :
      $n^a = -g^{ab}\omega_a$
    - Dual vector to Ω_a can be time direction :
      $t^a = \alpha n^a + \beta^a, \quad \Omega_a\beta^a = 0$
    - α : lapse function
      - 時間の進め方の自由度
    - β : shift vector
      - 空間座標の選び方の自由度

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta^k\beta_\kappa)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij}dx^i dx^j$$



数値相対論

- $G_{ab}n^a n^b = 8\pi T_{ab}n^a n^b \Rightarrow {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho_h$

  Hamiltonian constraint

- $\perp G_{ab}n^a = 8\pi \perp T_{ab}n^a \Rightarrow D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi j^i$

  momentum constraint

基本幾何学量の時間方向の微分を含まない

可積分条件

- $\perp G_{ab} = 8\pi \perp T_{ab} \Rightarrow$

$$\left(\partial_t - \pounds_\beta\right)K_{ij} = -D_iD_j\alpha + \alpha[R_{ij} - 2K_{il}K^l_j + KK_{ij}] + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S-\rho_h) - 2S_{ij}]$$

K_{ab}の発展方程式

- K_{ab}の定義式 $\Rightarrow \left(\partial_t - \pounds_\beta\right)\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}$ γ_{ab}の発展方程式

- Energy momentum tensor : $T_{ab} = \rho_h n_a n_b + n_{(a}j_{b)} + S_{ab}$

$$\rho_h = T_{ab}n^a n^b \qquad S_{ab} = \perp T_{ab}$$

$$j^a = -\perp T^a_b n^b$$

数値相対論

基本方程式: (BSSN (Shibata-Nakamura) formarism)

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right)\phi = \frac{1}{6}\left(-\alpha K + \partial_k \beta^k\right)$$

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right)\gamma_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \gamma_{k(i}\partial_{j)}\beta^k - \frac{2}{3}\gamma_{ij}\partial_k \beta^k$$

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right)K = -D^k D_k \alpha + \left[\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2\right] + 4\pi\alpha(\rho_h + S)$$

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right)\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left[\alpha R_{ij} - D_i D_j \alpha\right]^{\mathrm{TF}} + \alpha\left(K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k_j\right)$$
$$+ \tilde{A}_{k(i}\partial_{j)}\beta^k - \frac{2}{3}\tilde{A}_{ij}\partial_k \beta^k - 8\pi\alpha(e^{-4\phi}S)^{\mathrm{TF}}$$

$$\left(\partial_t - \beta^k \partial_k\right)F_i = -16\pi\alpha\, j_i + \delta^{jk}\left[-2A_{ij}\partial_k \alpha + (\partial_k \beta^l)\partial_l \tilde{\gamma}_{ij} + \partial_k(\tilde{\gamma}_{l(i}\partial_{j)}\beta^l - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}_{ij}\partial_l \beta^l)\right]$$
$$+ 2\alpha\left[\tilde{\gamma}^{kj}\partial_j \tilde{A}_{ik} - \partial_j A^j_i + \tilde{A}_{ik}\partial_j \tilde{\gamma}^{kj} - \frac{1}{2}\tilde{A}^{jk}\partial_i \tilde{\gamma}_{kj} + 6\tilde{A}^k_i \partial_k \phi - \frac{2}{3}\partial_i K\right]$$

A03
A02

数値相対論：現状

- 有限温度高密度状態方程式 (Shen et al. 1998)
  - 相対論的平均場近似 (音速が光速を超えない)
  - + Sumiyoshi & Nakazato extension
- Weak Interactions
  - 電子(ν)捕獲反応 (Fuller et al.1985)
    - Thermal unblocking 含む
  - ニュートリノ対生成
    - 電子対消滅 (Cooperstein et al. 1986)
    - Plasmon decay (Ruffert et al. 1996)
    - Bremsstrahlung (Burrows et al. 2004)
- ニュートリノ冷却 (YS 2008)
  - (e, n, p, A) – scattering
    - Ion correlation, etc 含む
  - (n, p, A) – absorption

$$\nabla_a(\rho u^a) = 0$$
$$\nabla_a(\rho Y_e u^a) = S_{Ye}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\nu e} u^a) = S_{\nu e}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\bar{\nu} e} u^a) = S_{\bar{\nu} e}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\nu x} u^a) = S_{\nu x}$$

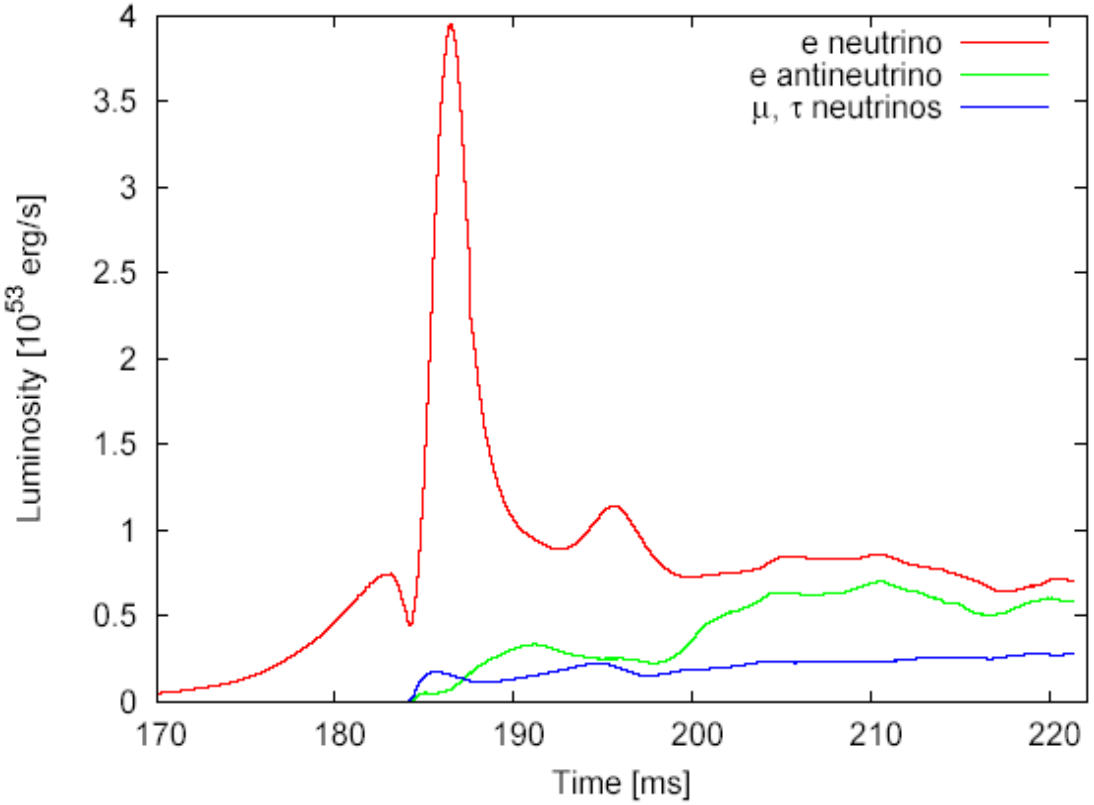
$$\nabla_a(T^{\mathrm{Matter}})^a_b = -Q_b$$
$$\nabla_a(T^{\nu})^a_b = Q_b$$

A03

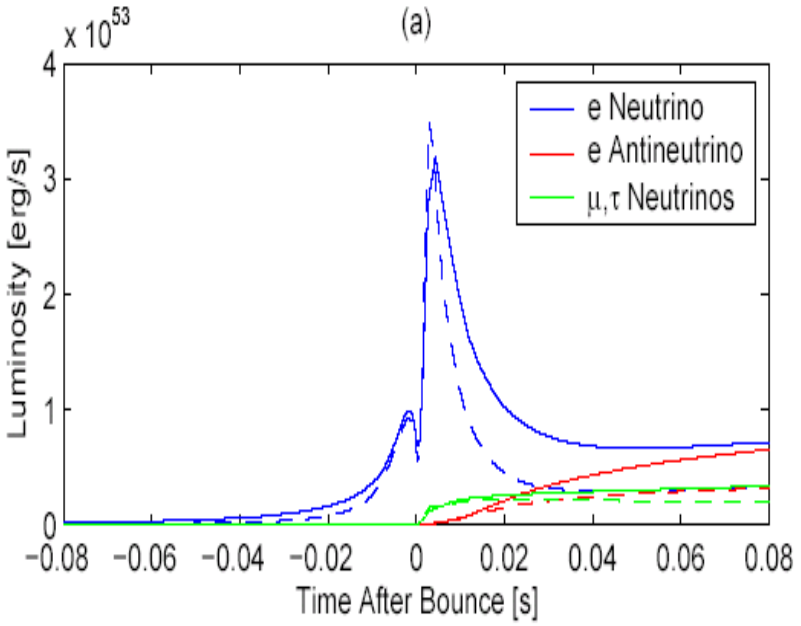
球対称星の崩壊

- 1D GR Boltzmann 計算とよく一致
  (ρ ,Ye, entropy profiles, neutrino energy)

Spherical 15 solar mass model by Woosley et al. (2001)



Liebendoerfer et al. (2004)
10ms after bounce



A03
A02

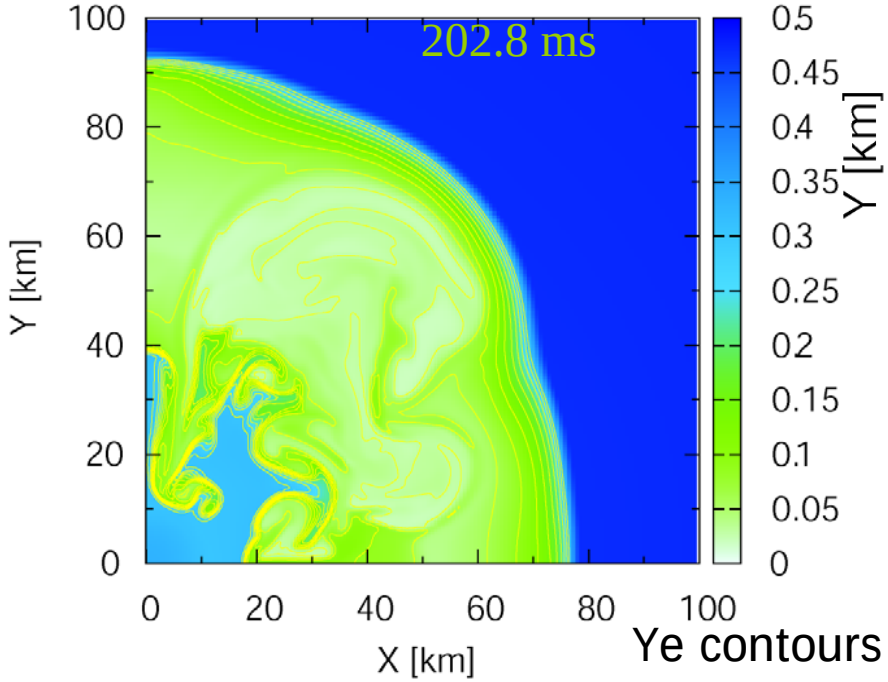
原始中性子星の対流

negative/positive　　negative

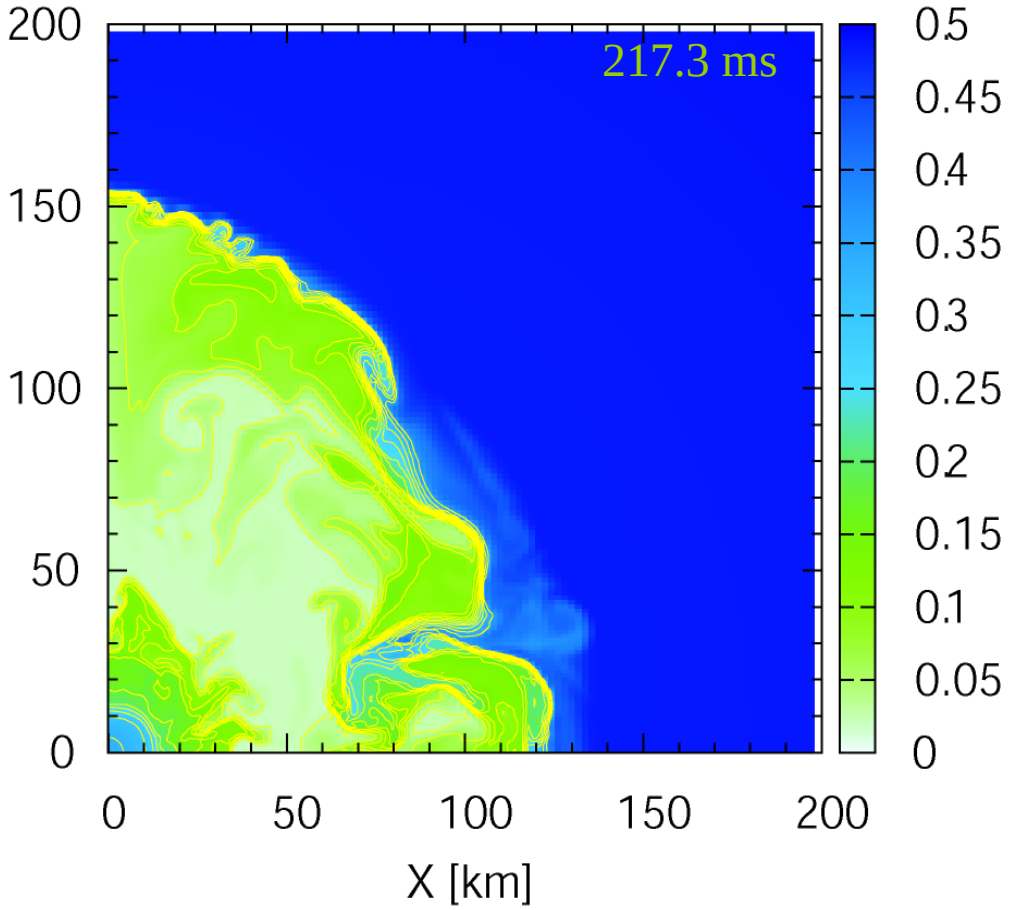
$$\text{Ledoux criterion}: \left(\frac{\partial \rho}{\partial Y_l}\right)_{P,s} \frac{dY_l}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{P,Y_l} \frac{ds}{dr} > 0 \quad \text{(unstable)}$$

15Msolar model by Woosley et al. 2002

Ye contour



Ye contours



A03
A02

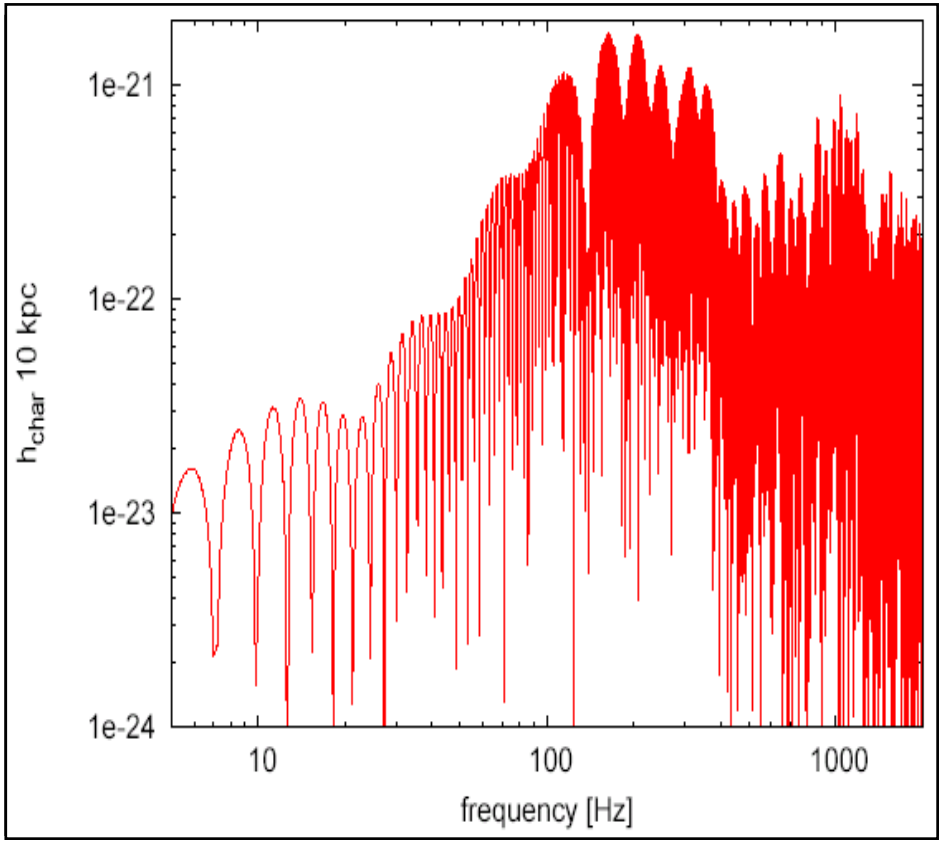
対流からの重力波

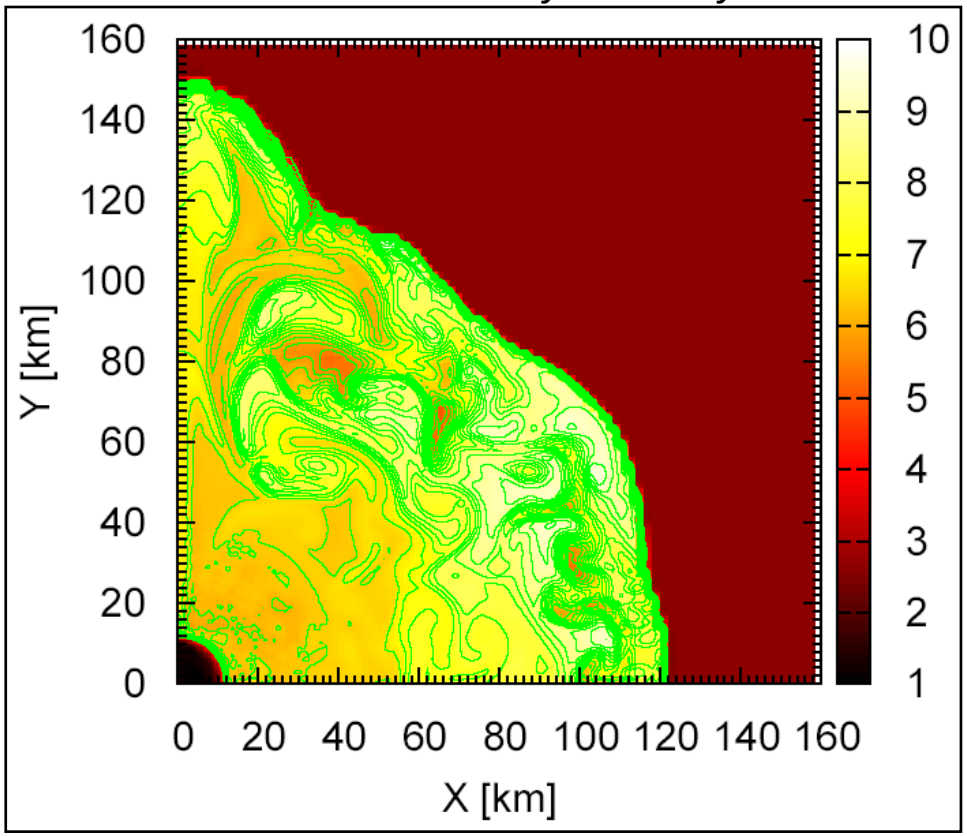
YS (2009)

$$h \sim \delta_{\rm nonsphe} \frac{GM}{c^2 R} \frac{R}{D} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{21} \left(\frac{\delta_{\rm nonsphe}}{0.05}\right) \left(\frac{C_{\rm omp}}{0.2}\right) \left(\frac{10{\rm kpc}}{\rm D}\right) \left(\frac{R}{50{\rm km}}\right) \left(\frac{v}{0.1c}\right)^2$$

重力波スペクトルにいくつかのピーク：対流のスケールに相当

15Msolar model by Woosley et al. 2002



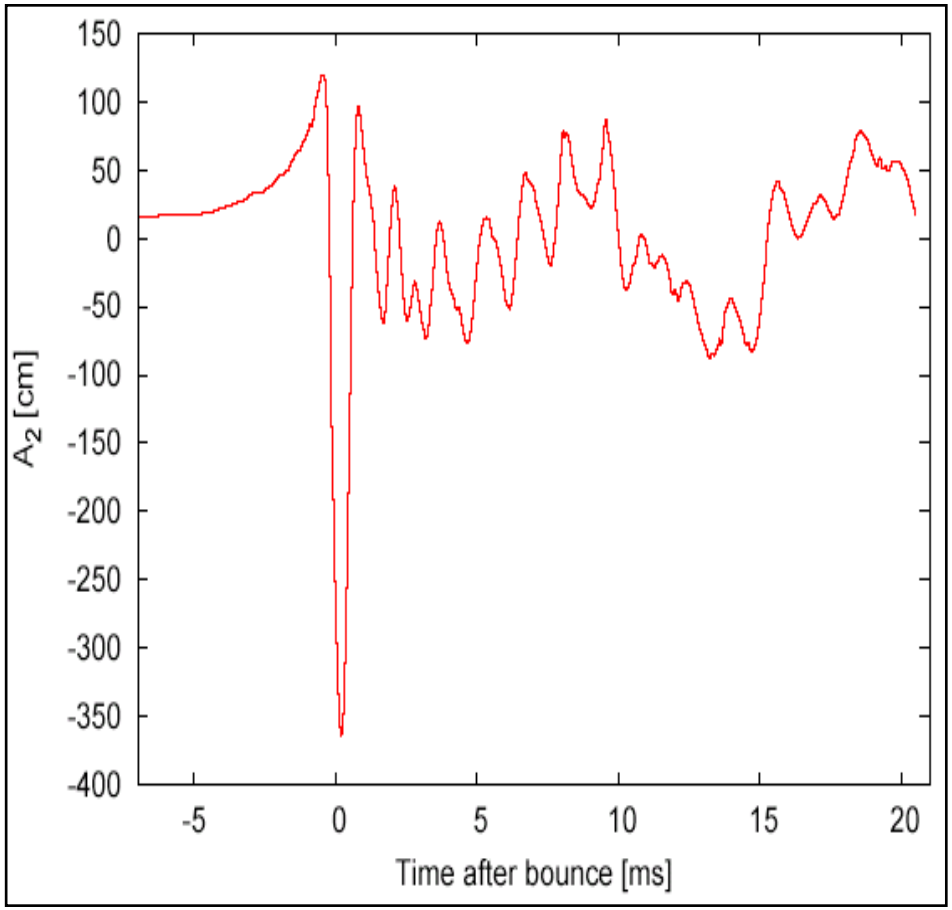


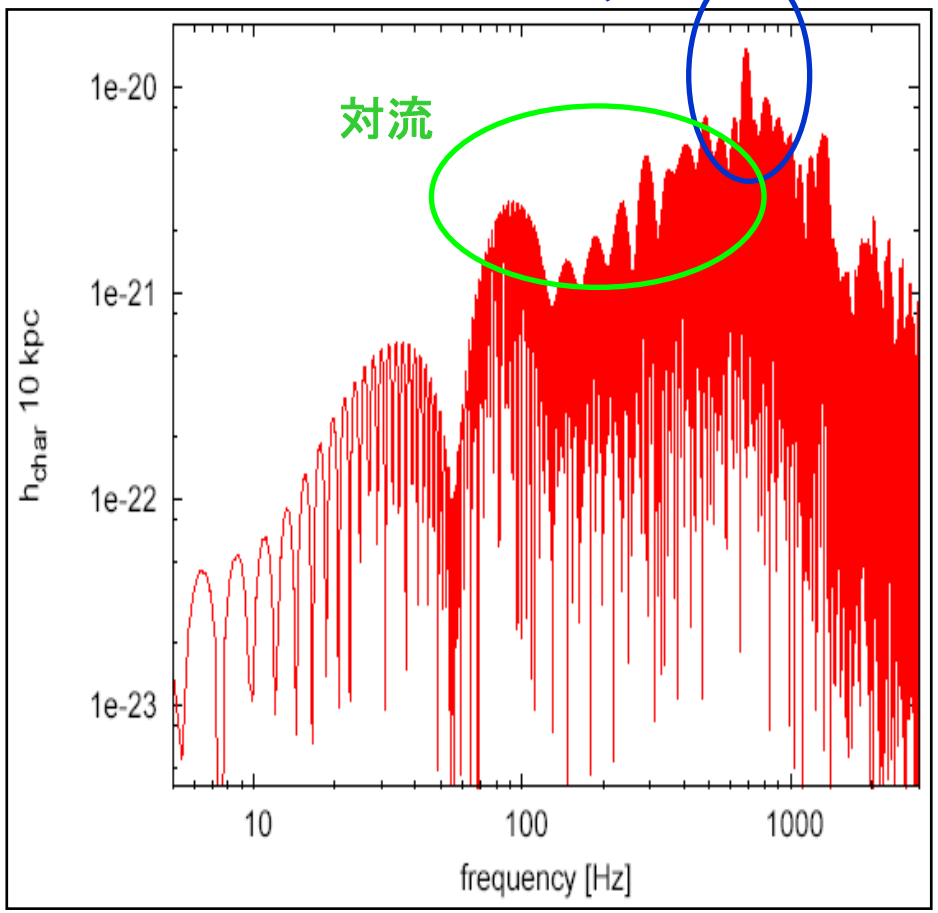
A03

回転重力崩壊

YS (2009)

20Msolar model by Heger et al. 2000

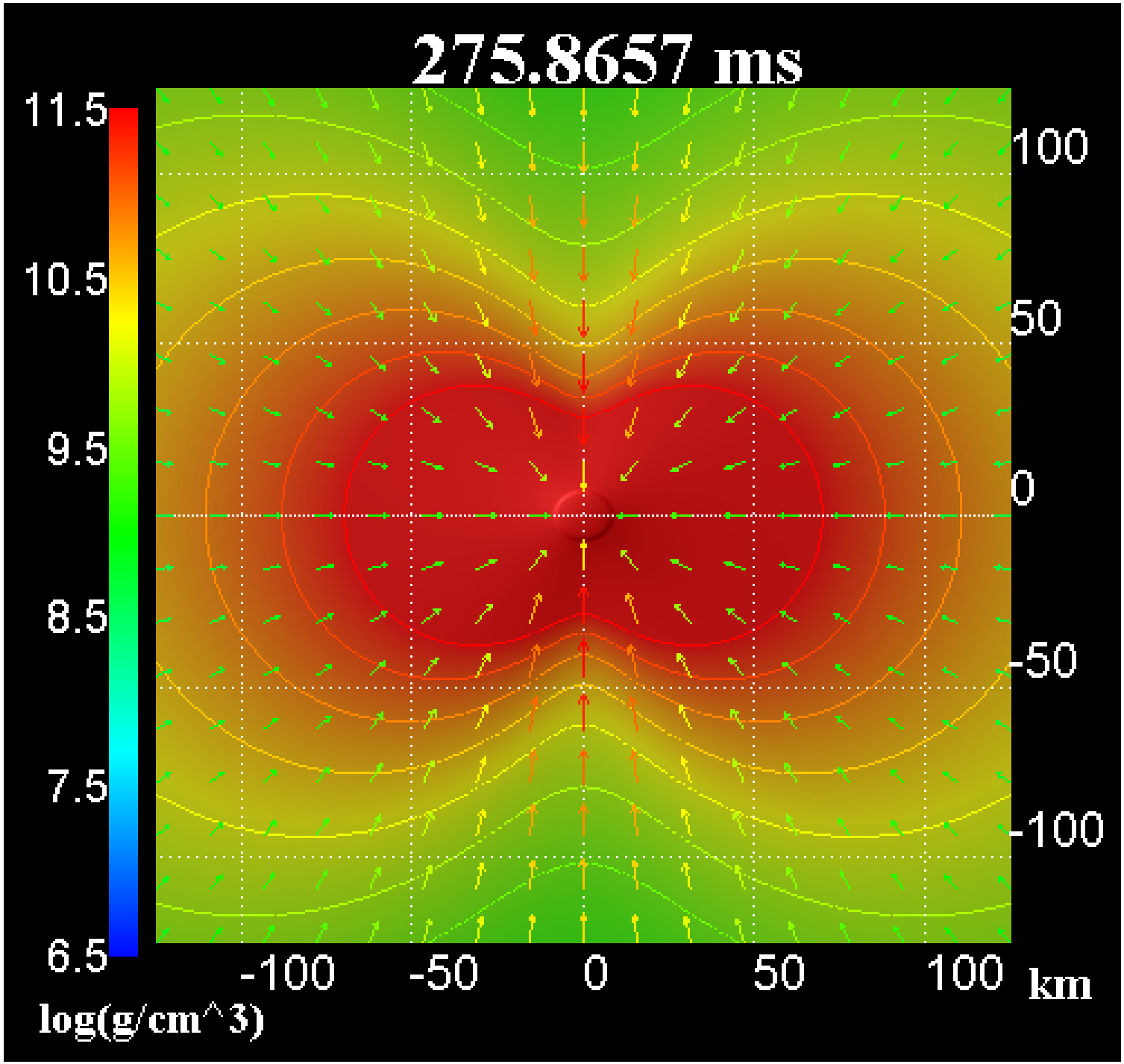




現状ではもっとも洗練された重力波波形

A03

回転重力崩壊で
BHも作れる



(共同)研究

- 状態方程式
- Weak rate
- 星の進化
- 一般相対論的ν輻射輸送
- 大質量星の重力崩壊

A02

状態方程式

- (相対論的)「**有限温度**」状態方程式
  - 音速が光速を超えないことが望ましい
  - **現状では平均場近似：Shen et al. (1998) + α**
    - Thomas-Fermi ＋spherical cell 近似

- **(ρ ,Ye, T) でテーブル化**
  - 広範囲テーブル: $10^4 < \rho < 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3}$, $0 < T < \mathrm{several}\,100\,\mathrm{MeV}$
- **シミュレーションでは微分が必要 ⇒ テーブル化**
  - **衝撃波捕獲法での特性速度の計算**
  - **陰的解法(Newton法)における微分の計算**
  - 熱力学第一法則を考慮した内挿が可能
    - GR計算では重要

A03
A02

状態方程式(1)

- **コアバウンスと状態方程式**
  - 爆発には K@bounce (T, Ye 依存) が小さいと有利
    - Cf. 釣り合い(F~-kx), エネルギー(E~kx^2)
- Incompressibility, L の影響(系統的)
  - T=0,Z=N でなくSN物質寄りで
  - 過去の計算
    - $K = K_{\rm sym}\left[1-2(1-2Y_e)^2\right]$ Van Riper (1988) ApJ 326, 235
    - $\rho_{\rm nuc} = 0.16[1-3(0.5-Y_e)^2]\,{\rm fm}^{-3}$
- パスタ構造、怪獣の効果
- エキゾチックマターの効果

A03
A02

状態方程式(2)

- **対流不安定性と状態方程式**

$$\text{Ledoux criterion}: \left(\frac{\partial \rho}{\partial Y_l}\right)_{P,s} \frac{dY_l}{dr} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{P,Y_l} \frac{ds}{dr} > 0 \quad \text{(unstable)}$$

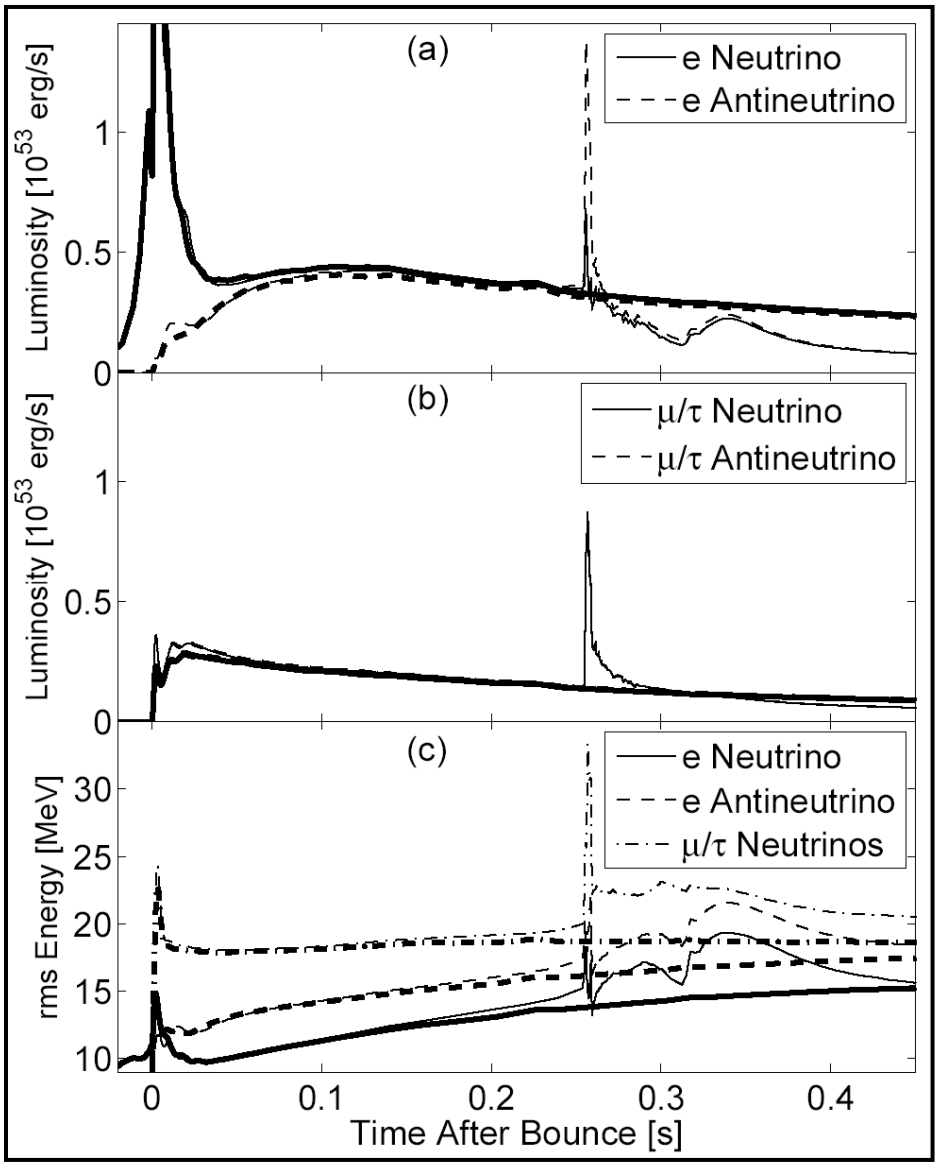
- 実は調べられていない
  - 対流だけでは不十分なのはおそらく確定
  - 最初に衝撃波をどこまで押せるかには重要
  - SASIとニュートリノ加熱が効率的に効くかには重要
- 球対称＋多次元シミュレーション
- 対流からの重力波

A03
A02

状態方程式(3)

- 相転移
  - 相転移に伴う内部エネルギーの解放により2nd衝撃波が発生
- クォーク相転移ではMIT Bug model
  - より洗練された取り扱い

Sagert et al. (2009) PRL 102, 081101



A03
A02

状態方程式(4)

- **Zero or low 温度状態方程式**
  - 連星中性子星の合体(でBHが形成される場合)から探れる (木内君のレビュー)
  - QCDで計算された核力を用いて
    パスタ・怪獣を考慮して作られた
    精緻なEOSを使ってシミュレーション
  - ⇒ 重力波 ⇒ ノーベル賞に寄与
  - ハイペロン、クォーク

A02

Weak rate

$$\lambda^{\mathrm{weak}} = \sum_i P_i \sum_j \lambda_{ij}$$

$$\lambda_{ij} = C\left|M_{ij}\right|^2 f_{ij}$$

M: transition matrix

f : lepton phase space factor

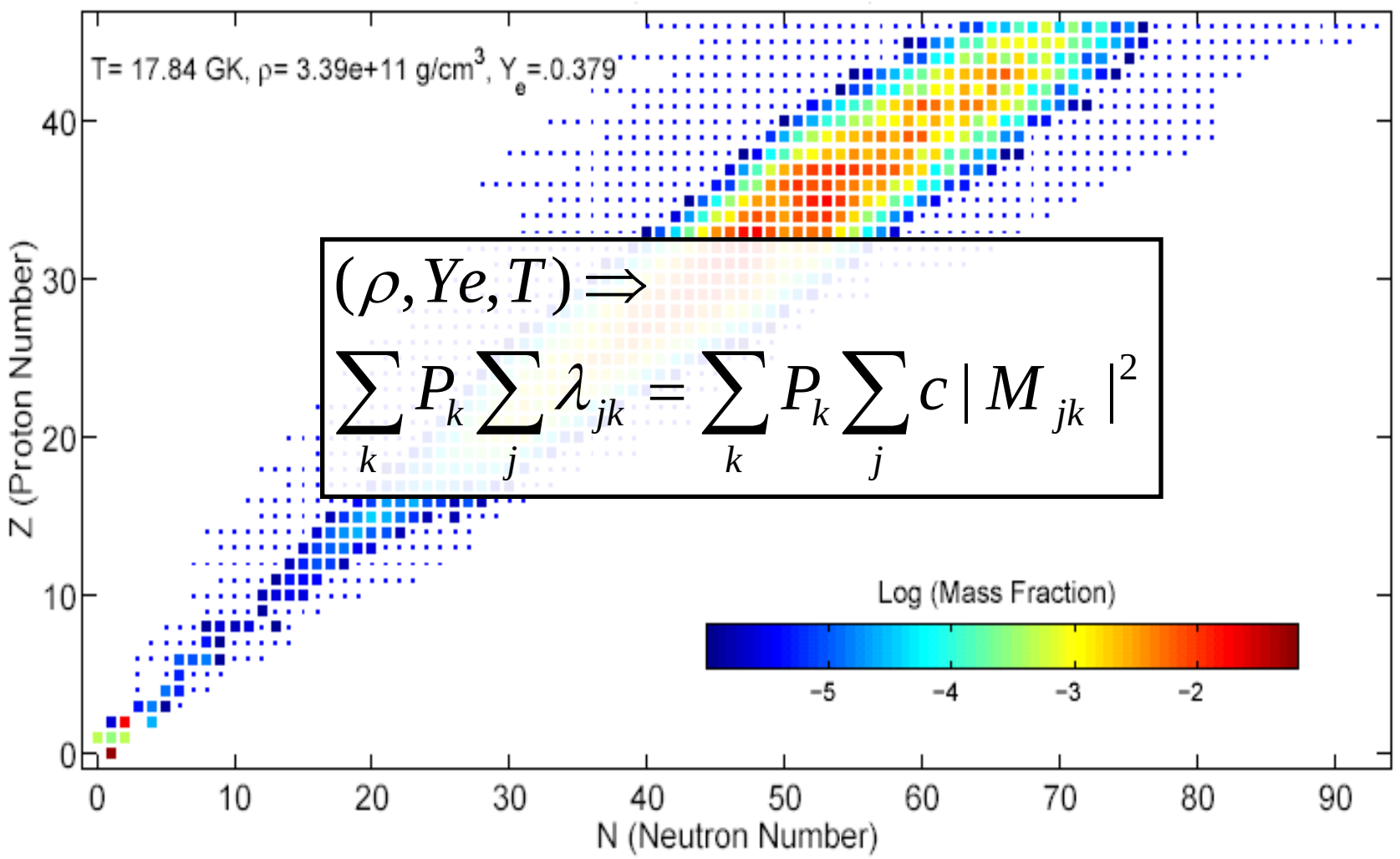
- **現状: 状態方程式 ⇒ M(A,Z), Xp, Xn, X_A**
  - 1種の原子核に代表させて計算
  - Independent particle model (Fuller et al. 1985)
  - Langanke らはモンテカルロ shell model
- **本来は親核、娘核の情報が必要 (Shell model)**
  - 安定核(多量)は反応率が低い
  - 不安定核(少量)は反応率が高い
- (ρ ,Ye, T) でテーブル化されていると非常に有用
  - f の Q値依存性の部分には目をつぶる

$$\lambda^{\mathrm{weak}} \sim \left[\sum_i P_i \sum_j C\left|M_{ij}\right|^2\right] f = \left|M(\rho, Ye, T)\right|^2 f$$

A03
A02

Weak rate（1）

- 電子捕獲反応テーブルの作成

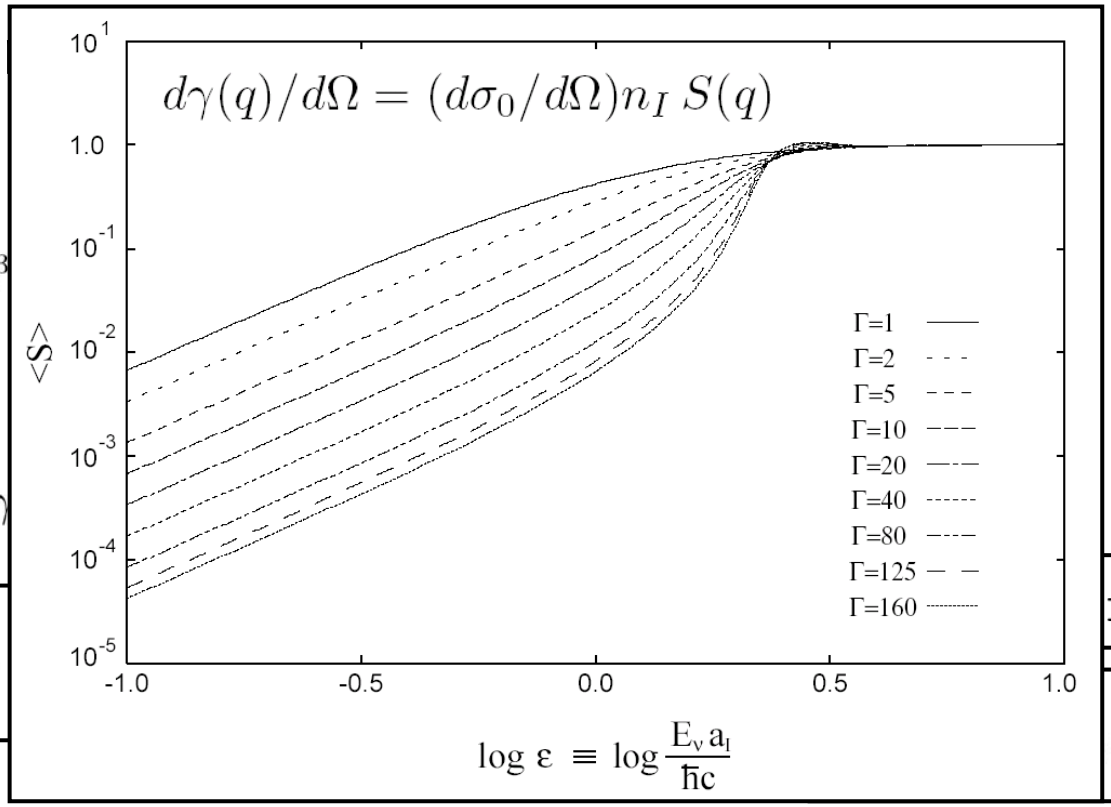


A03
A02

Weak rate（2）

Sawyer (2005) PLB 630, 1

- **バウンスコア質量と weak rate**
  - バウンスコアが大きいと爆発に有利：$M_{core} \propto (YI)^2$
- Coherent scattering と ion electron correlation
  - Hete



$$\int d^3$$

$$d\gamma$$

$$\frac{W(q,\delta,\kappa_e)}{W(q,0,0)}$$

$$\pm \delta)$$

$$\approx e^2 \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{1/3}$$

A03
A02

Weak rate（3）

- その他の効果(e.g. electron polarization Leinson et al. 1988) の定量的評価 ⇒ シミュレーション

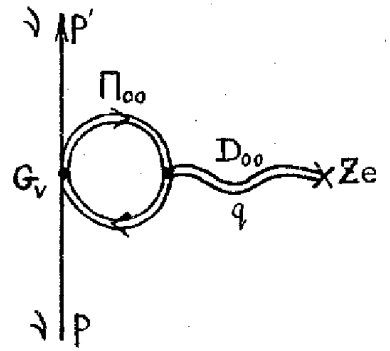


Fig. 1. Feynman diagram of ν A-scattering from a Coulomb centre. Double lines show the polarization tensor $\Pi_{\mu\nu}$ and the Green function of a plasmon in the medium $D_{\mu\nu}$. In the static limit, the only components are $\lim_{K\to 0}\Pi_{00}(0,K)=r_D^{-2}$ and $D_{00}(0,K)=4\pi/(k^2+r_D^{-2})$.

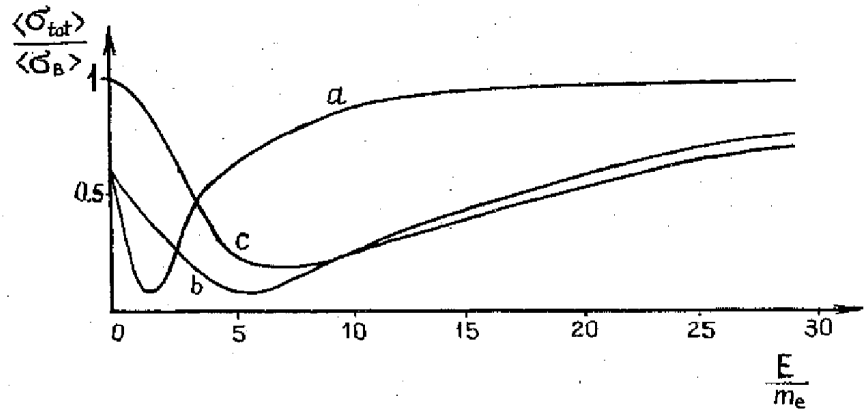


Fig. 2. The ratio of the cross section $\sigma_{tot}(E)$ (6) and $\sigma_B(E)$ – the first term in (6) – for iron nucleus $_{26}Fe^{56}$ in a collapsar with the density values $\rho\sim 10^{10}$ g/cm^3 (a), $\rho\sim 10^{12}$ g/cm^3 (b), and for oxygen nucleus $_8O^{16}$ for $\rho\sim 10^{12}$ g/cm^3 (c). The parameter ξ is equal to 0.25.

A03

星の進化計算(1)

- 多次元のモデルが必要
- 1次元: 多くの近似 ⇒ さまざまな場合について計算
  - 「対流」の取り扱い
    - Schwarzshild ⇔ Ledox
    - Doubly diffusive instability, Semiconvection
    - Convective overshooting ⇔ convective penetration
  - 「回転」の取り扱い
    - Rotation induced mixing
    - Chemically homogenious evolution
  - 「Mass loss」の取り扱い
    - Metallicity 依存、非球対称 loss
    - 宇宙の一番星: zero metal
- **初期条件・元素合成計算の背景**

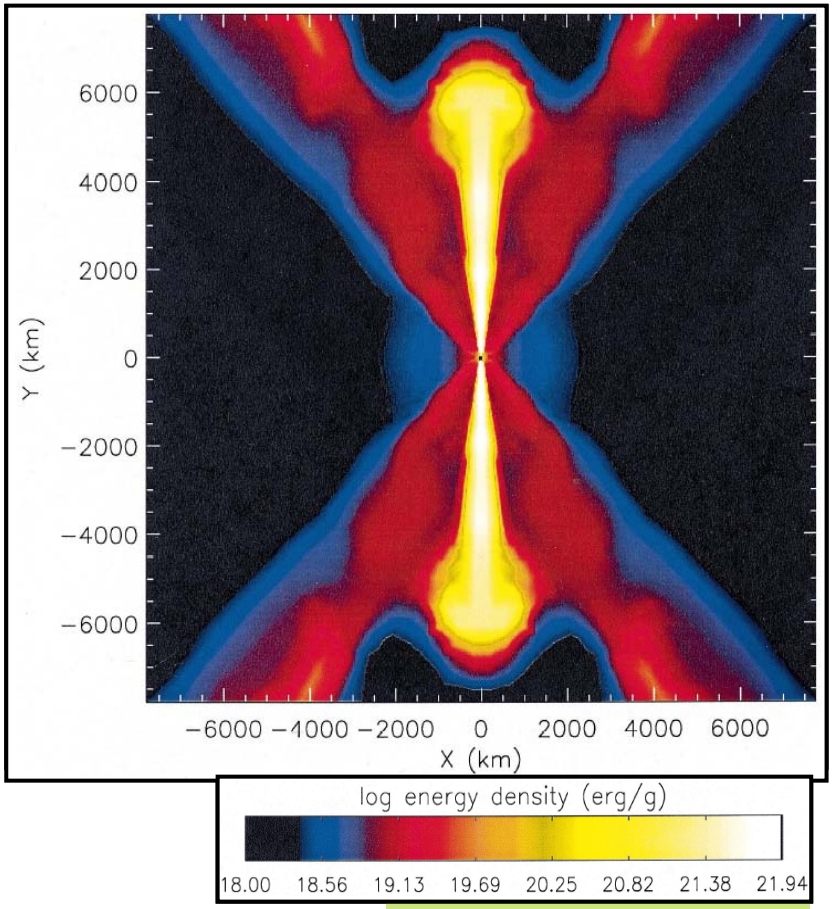
GRB Collapsar Model

Woosley (1993); MacFadyen & Woosley (1999)

- **大きな角運動量が必要**
  - Type-Ic / Type-Ib SNe の付随
  - ジェットの星表面への到達可能性
  - **角運動量保持しつつH外層をなくす**

- $\nu + \bar{\nu} \rightarrow e + e^{+}$ （ $\propto L_{\nu}^{2}$ ）
  - 電子捕獲反応($\propto L_{\nu}\rho$)との競合
  - **低密度高温領域の必要性**

- **強磁場($B > 10^{15}$ G)が必要**
  - **PopIII形成環境下の磁場は？**



MacFadyen & Woosley 1999

GRB Collapsar Model

- Neutrino pair annihilation : $\nu + \bar{\nu} \rightarrow e + e^{+}$
  - 高密度環境ではバリオンによるニュートリノ吸収に負ける
    - rate : L_{ν}^{2} vs $L_{\nu}\rho$
  - 低温では縮退電子のPauli broking が効く　　また反ニュートリノも少ない
    - rate $\propto \left[1+\exp\left(-\eta_{\nu}+\eta_{e}\right)\right]^{-1}$
  - 幾何学的に厚いDisk があると良い
    - rate $\propto \left\langle 1-\cos\theta_{\nu\text{colision}} \right\rangle$

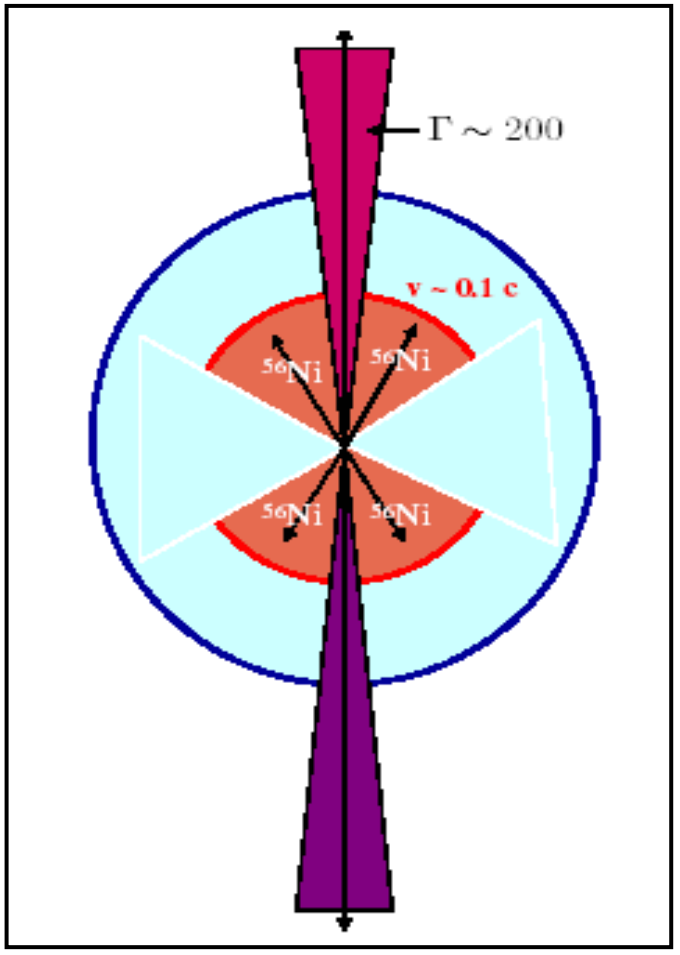
GRB Collapsar Model

- SN成分?
  - Direct BH formation なら爆発しない?
    - ν Disk wind
      (Qian & Woosley 1996, Lee & Ramirez-Ruiz 2006)

$$\dot{M} \sim 5\times10^{-4} M_{\odot}\ \mathrm{s}^{-1} \left(\frac{L_{\nu}}{10^{52}\ \mathrm{erg/s}}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad \dot{M} \sim \frac{5L_{\nu\bar{\nu}}}{c^2}$$

    - 他のメカニズム？
  - Fallback BH formation なら可能性あり
  - 磁場効果？(Blandford & Payne 1982)

- ほとんど考えられていない
  - GRB without SN はあってもいいはず！
  - GRB with SN と性質が異なるか？



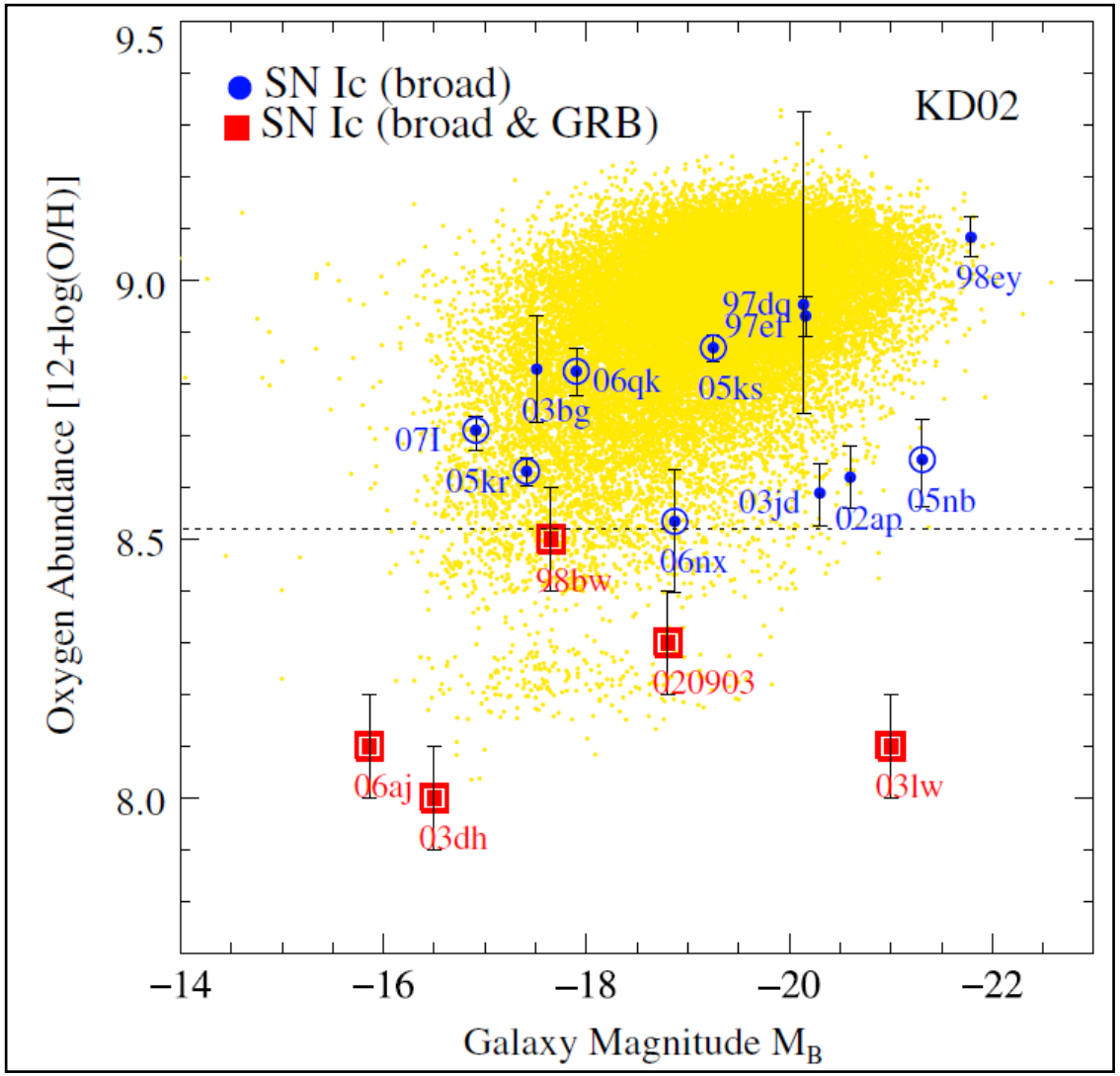
Woosley & Heger (2006)

GRB progenitor model

- 基本的要請
  - Progenitor は Type-Ic SNe を起こす
  - H, He 外層が無い
  - mass loss ?
  - mass loss は spin loss を伴う
  - (GRB + Disk を GRB 中心天体と仮定して)
    角運動量を保持しつつ、どう外層を無くすか?

GRB/SN and Metallicity

- SNとGRBの起こる環境では少なくともmetallicity に優位な差がありそう

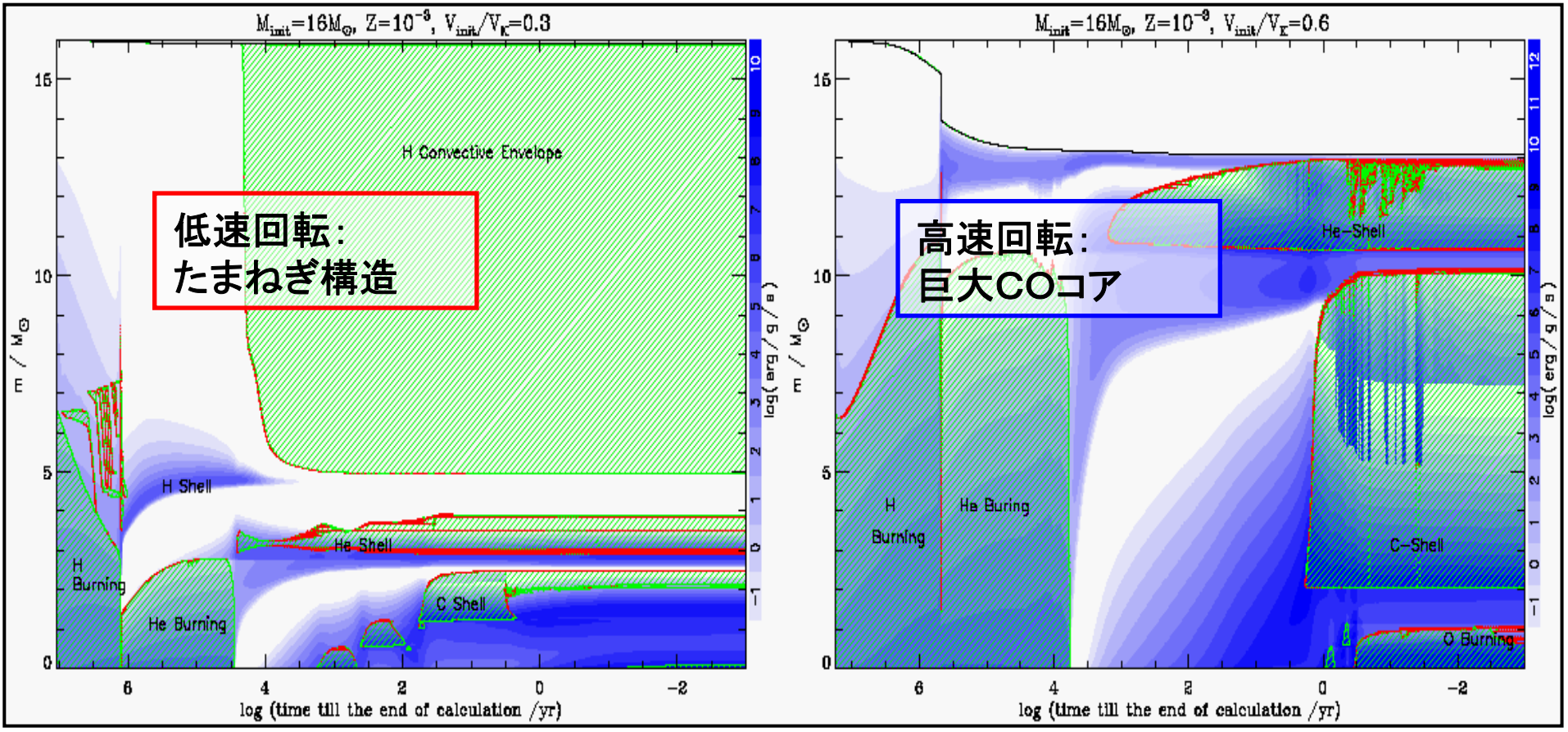


Modjaz et al. (2008)

Effect of rapid rotation

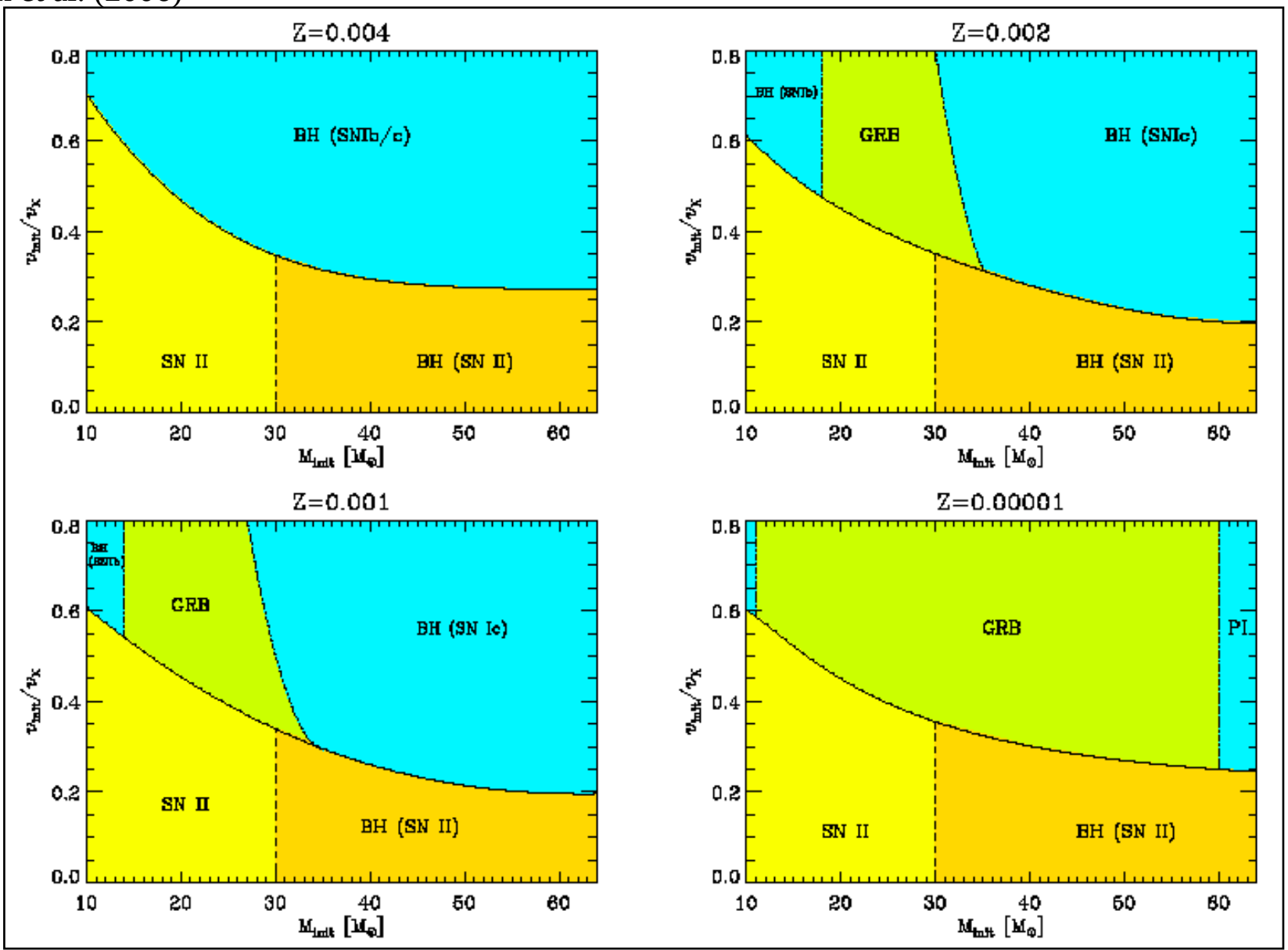
(Yoon & Langer 2005,2006; Woosley & Heger 2006)

- 高速回転 → mixing により化学組成が一様な進化



GRB Progenitor model

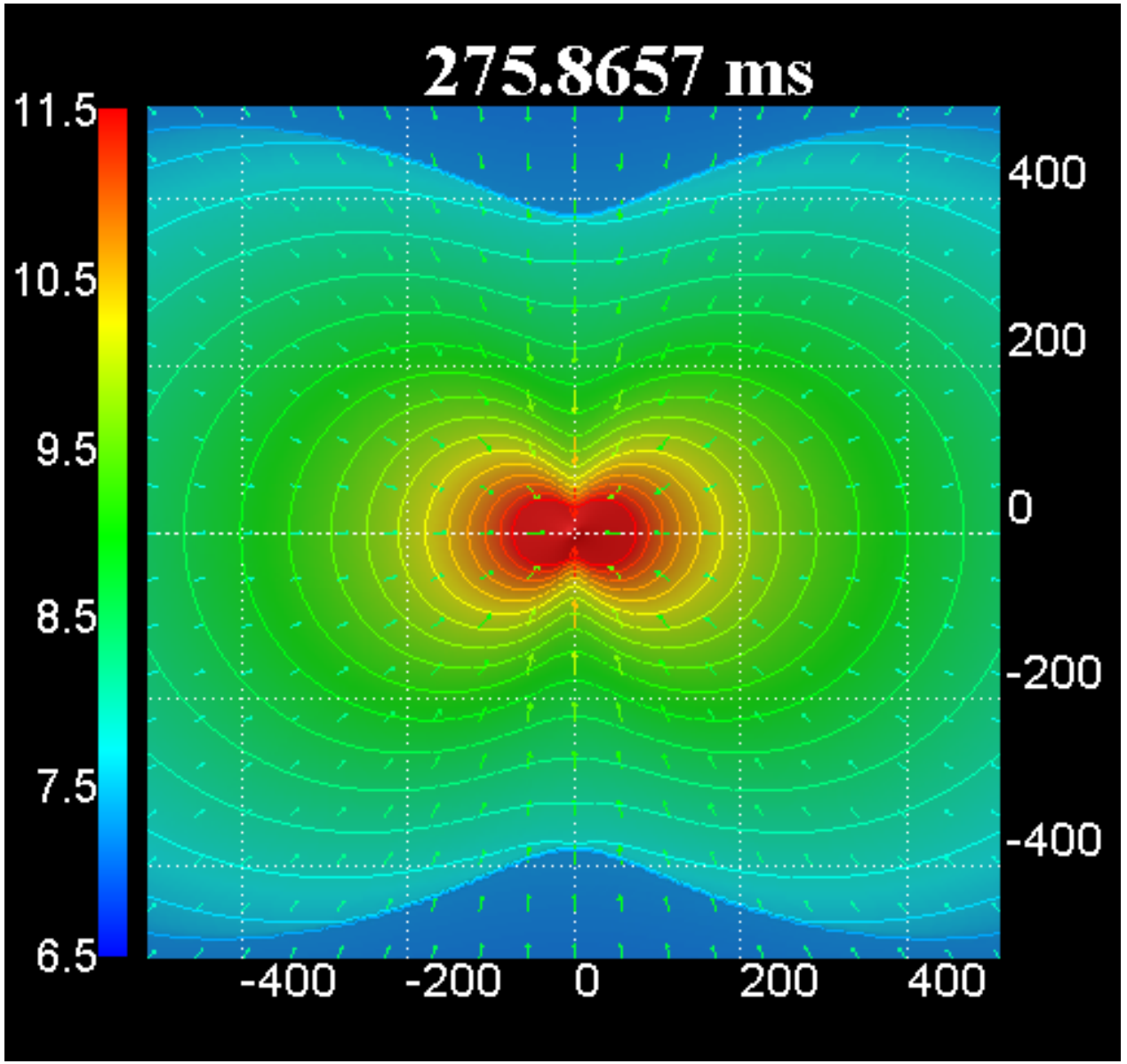
Yoon et al. (2006)



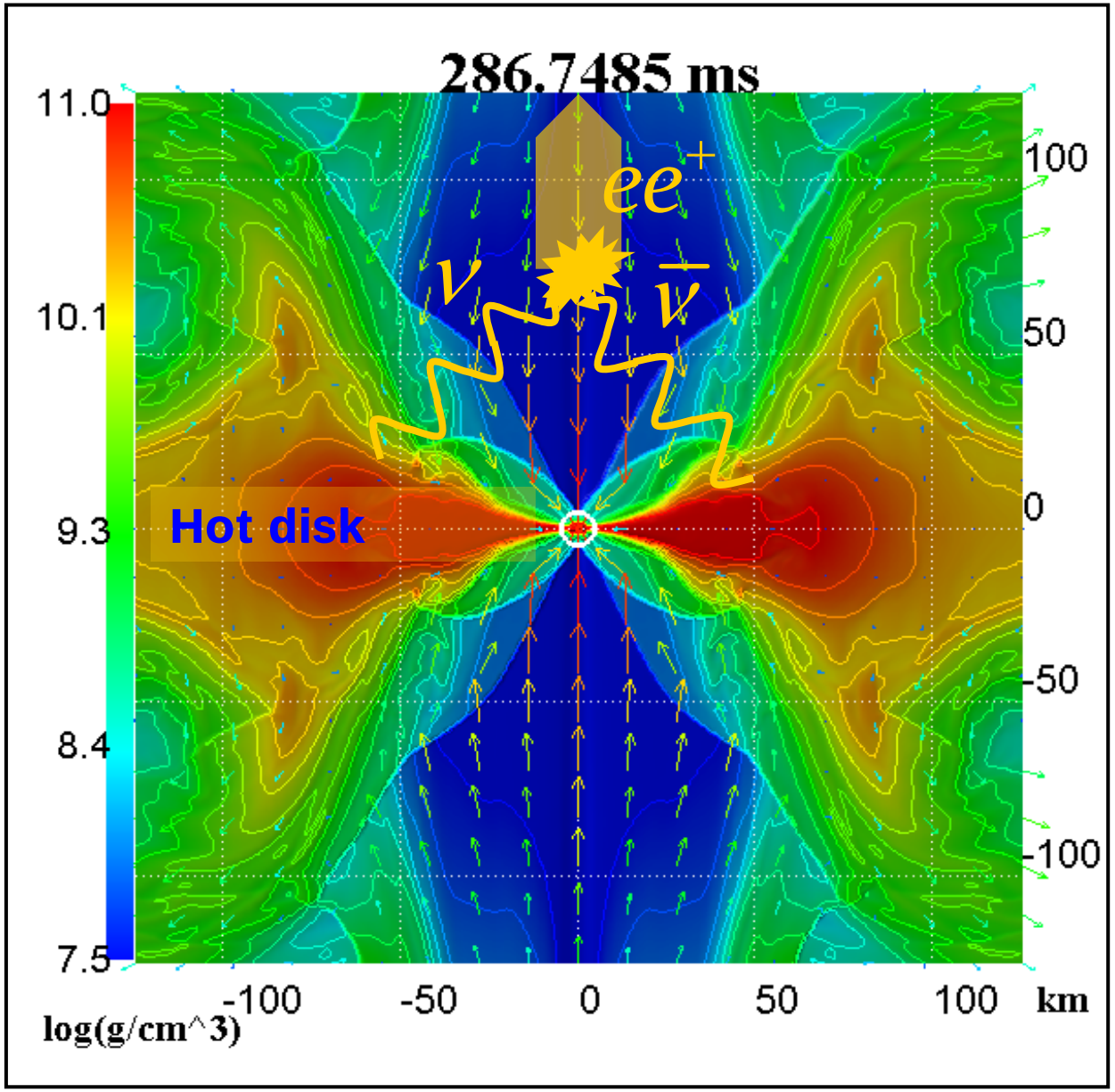
A03
A04

大質量星の重力崩壊(1)

- GRB（BH+Disk系の形成）

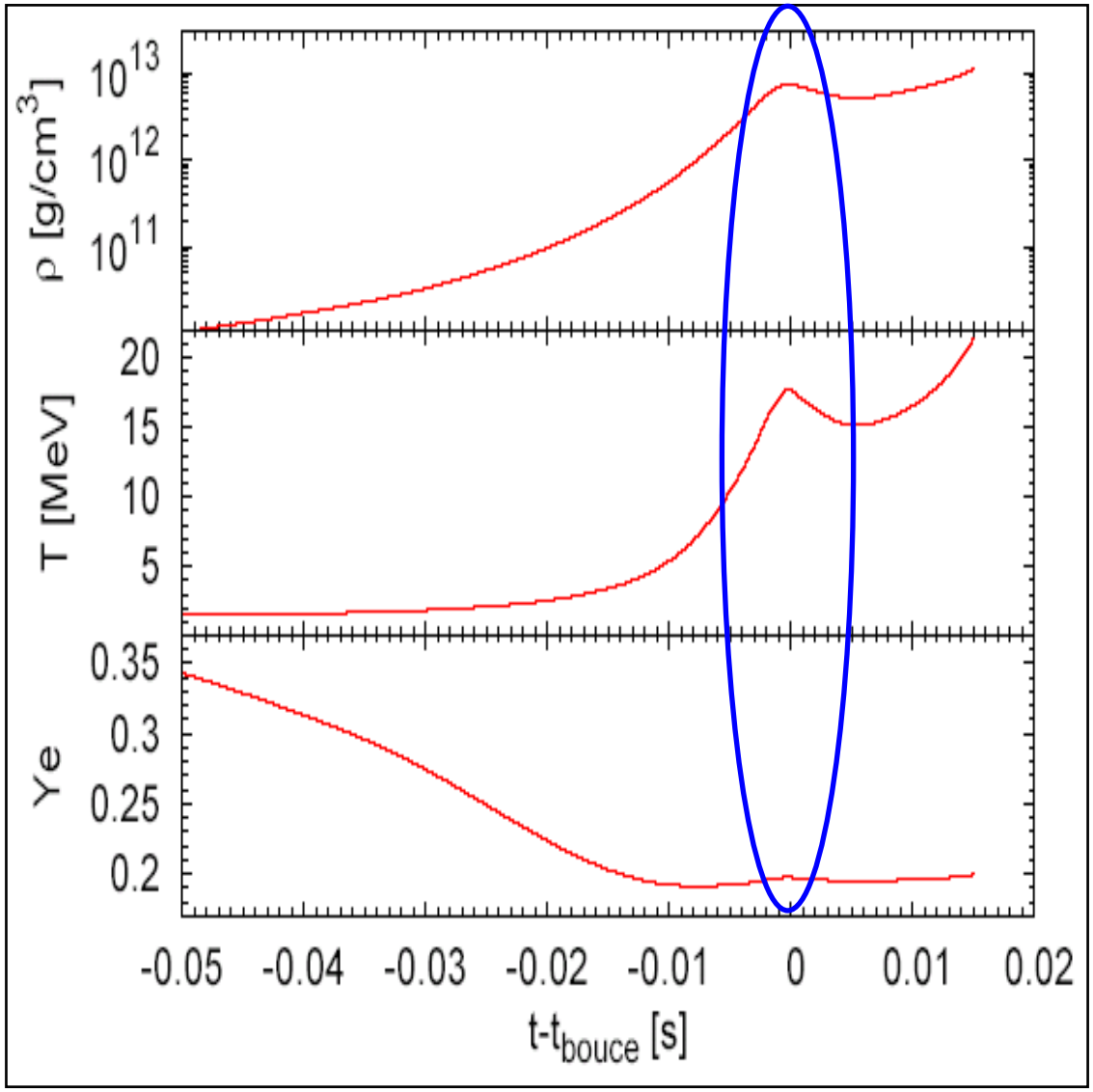


- ニュートリノ対消滅率の計算！！



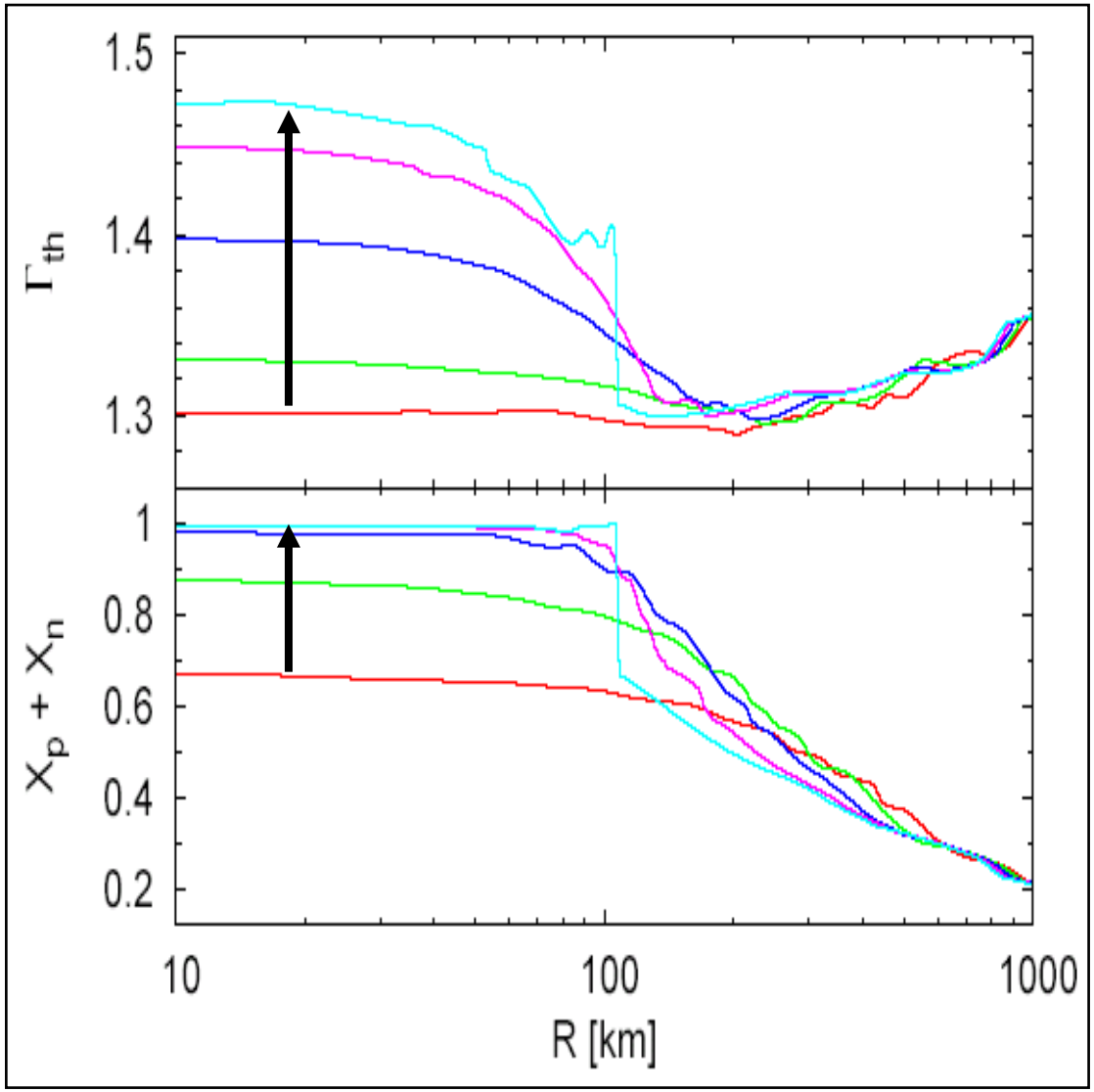
A03
A04

大質量星の重力崩壊(2)



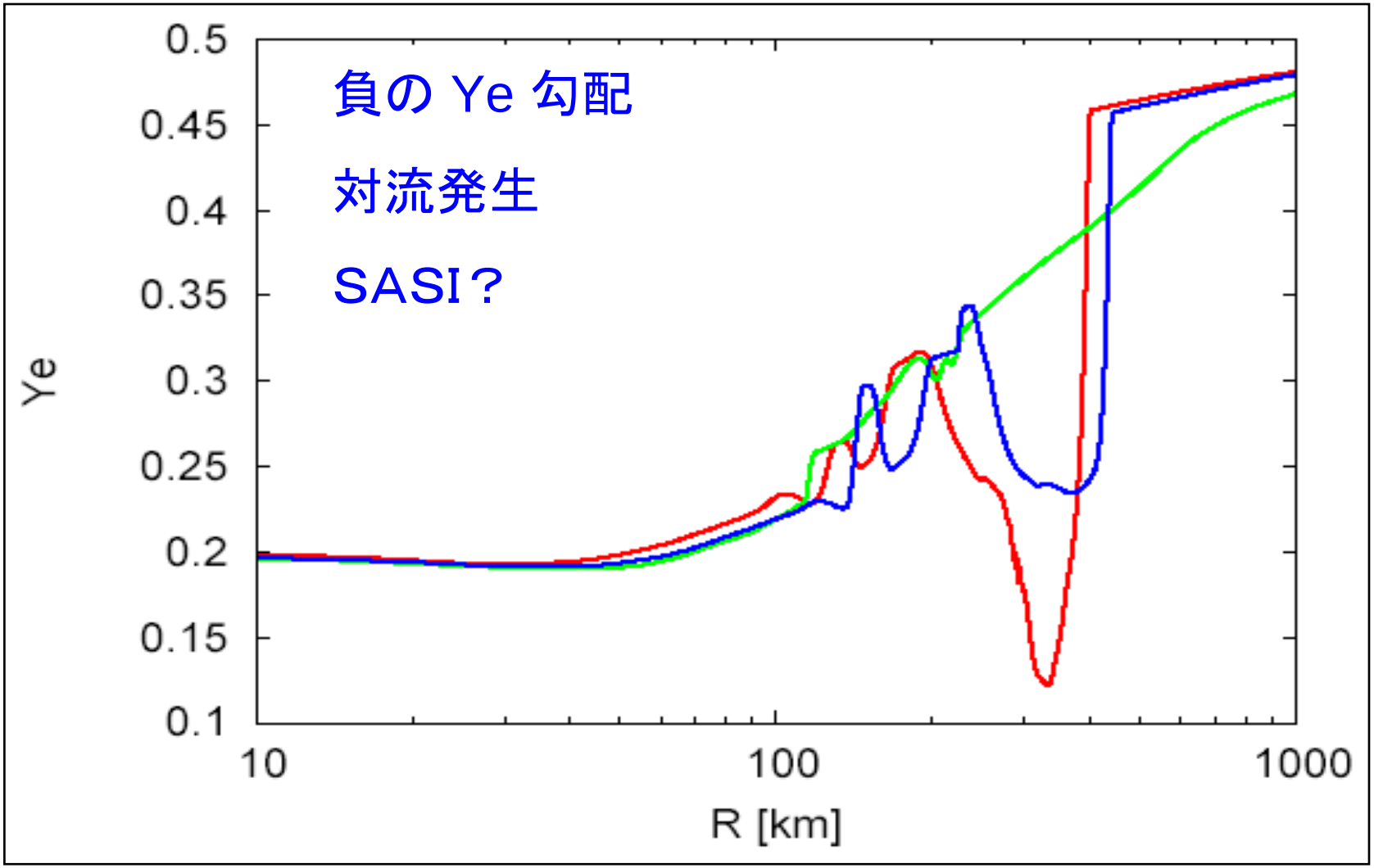
- 高エントロピーコアの崩壊
- バウンス時
  - ρ ~ 10^{13} g/cm^3
    - **核密度以下！**
  - T ~ 18 MeV
  - Ye~ 0.2
- Nakazato et al. 2007 と consistent

He 光分解 バウンス



- He → 2p + 2n
  - ガス圧(Γ=5/3)増大
- 電子縮退圧(Γ=4/3)と合わさって $\Gamma \sim 1.5$
- ニュートリノによる冷却効果で $\Gamma_{th} < 1.5$

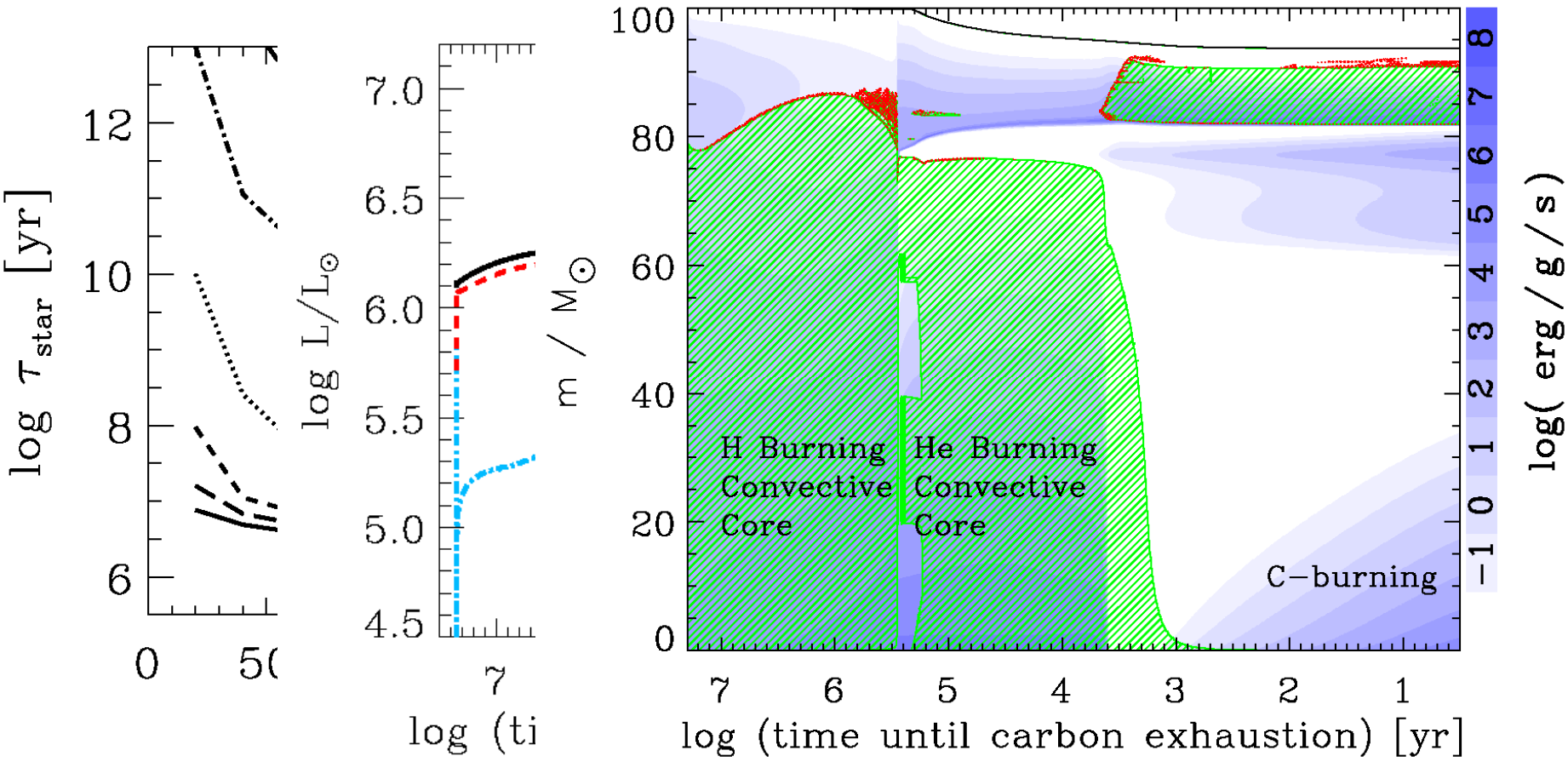
対流不安定領域


負の Ye 勾配
対流発生
SASI？
Ye
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
10
100
1000
R [km]

A03

星の進化計算(2)

- エキゾチック効果⇒元素合成・宇宙の再電離
  - e.g. Dark matter burning in PopIII (Yoon et al. (2008))



A03
A04

一般相対論的 ν 輸送

- 球対称計算以外では未開拓
- 多次元: 現状では2流体モデル+ α

- 少なくともソース項は陰的に解くことが必要
  - $\dot{I} = -\sigma I \Rightarrow I^{n+1} = (1-\Delta t\sigma) I^{n}, \quad I^{n+1} = (1+\Delta t\sigma)^{-1} I^{n}$
  - 一般には行列反転が必要
    - Operator split : ソース項のみ陰的に解く ⇒ 非線形代数方程式
- GR 輻射輸送方程式
  - 流体静止系 ⇔ 局所ローレンツ系 ⇔ (曲がった)大域座標系
  - 時空の曲がりを考慮

- 近似的手法の開発と原理的計算の同時進行

A03
A02

数値相対論：現状

- 有限温度高密度状態方程式 (Shen et al. 1998)
  - 相対論的平均場近似 (音速が光速を超えない)
  - + Sumiyoshi & Nakazato extension
- Weak Interactions
  - 電子(ν)捕獲反応 (Fuller et al.1985)
    - Thermal unblocking 含む
  - ニュートリノ対生成
    - 電子対消滅 (Cooperstein et al. 1986)
    - Plasmon decay (Ruffert et al. 1996)
    - Bremsstrahlung (Burrows et al. 2004)
- ニュートリノ冷却 (YS 2008)
  - (e, n, p, A) – scattering
    - Ion correlation, etc 含む
  - (n, p, A) – absorption

$$\nabla_a(\rho u^a) = 0$$
$$\nabla_a(\rho Y_e u^a) = S_{Ye}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\nu e} u^a) = S_{\nu e}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\bar{\nu} e} u^a) = S_{\bar{\nu} e}$$
$$\nabla_a(\rho Y_{\nu x} u^a) = S_{\nu x}$$

$$\nabla_a(T^{\mathrm{Matter}})^a_b = -Q_b$$
$$\nabla_a(T^{\nu})^a_b = Q_b$$

Energy Momentum Tensor

- Basic equation : $\nabla_a (T^{\mathrm{Total}})^a_b = 0$ ⇒

$$\nabla_a T_b^{a\ (\mathrm{fluid})} = -Q_b$$
$$\nabla_a T_b^{a\ (\nu)} = Q_b$$

- Energy momentum tensor of neutrinos :
  - 'Trapped neutrino' and 'Streaming neutrino' parts

$$T_{ab}^{(\nu)} = T_{ab}^{(\nu,\mathrm{trap})} + T_{ab}^{(\nu,\mathrm{stream})}$$

$$\nabla_a (T_b^{a\,(\nu,\mathrm{trap})} + T_b^{a\,(\nu,\mathrm{stream})}) = Q_b$$
$$\nabla_a T_b^{a\,(\nu,\mathrm{trap})} = Q_b - Q_b^{(\mathrm{leak})}$$
$$\nabla_a T_b^{a\,(\nu,\mathrm{stream})} = Q_b^{(\mathrm{leak})}$$

- Trapped neutrino part is included into Fluid part

$$T_{ab} = T_{ab}^{(\mathrm{fluid})} + T_{ab}^{(\nu,\mathrm{trap})}$$

$$T_{ab} = \rho h u_a u_b + P g_{ab}$$
$$T_{ab}^{(\nu,\mathrm{stream})} = E n_a n_b + F_a n_b + F_b n_a + P_{ab}$$

- The equation to be solved

$$\nabla_a T_b^a = -Q_b^{(\mathrm{leak})}$$
$$\nabla_a T_b^{a\ (\nu,\mathrm{stream})} = Q_b^{(\mathrm{leak})}$$

Neutrino cooling

YS (2009) c.f. Rosswog & Liebendoerfer (2004)

- **Neutrino Leakage Scheme**
  - "Cross sections" : $\sigma_i(E_\nu) = \tilde{\sigma}_i E_\nu^2$
  - "Opacities" : $\kappa(E_\nu) = \sum \kappa_i(E_\nu) = \tilde{\kappa} E_\nu^2$
  - "Optical depth" : $\tau(E_\nu) = \int \kappa ds = \tilde{\tau} E_\nu^2$
  - Diffusion time : $T_\nu^{\rm diff}(E_\nu) \equiv \frac{\Delta x(E_\nu)}{c} \tau(E_\nu) = \frac{\tilde{\tau}^2}{c\tilde{\kappa}} E_\nu^2$
  - **Neutrino energy and number leakage rate :**

$$\langle Q_\nu^{\rm diff} \rangle \equiv \int \frac{E_\nu \hat{n}(E_\nu)}{T_\nu^{\rm diff}(E_\nu)} dE_\nu \quad \propto T^2 F_1(\eta_\nu)$$

$$\langle R_\nu^{\rm diff} \rangle \equiv \int \frac{\hat{n}(E_\nu)}{T_\nu^{\rm diff}(E_\nu)} dE_\nu \quad \propto T \ F_0(\eta_\nu)$$

$$n_\nu = \int \hat{n}(E_\nu) dE_\nu$$

Fermi 分布で平均化した cooling source を考える

Notes

- ニュートリノ冷却のパラメータ:2
  - Optical depth ⇔ diffusion time
  - 何回の collision で thermalize するか

- ニュートリノ場、特に flux も解いているので
  これに基づいて luminosity が計算できる

- ニュートリノ温度の導入（on going）

A03
A04

一般相対論的 ν 輸送

$$\dot{\rho}_* = 0 \qquad [\rho_* = w\rho e^{6\phi} \qquad w = w(u_a, \rho, Y_e, T)]$$

$$\dot{e} = S_e(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu)$$
$$\dot{\varepsilon}_\nu = S_\varepsilon(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu)$$
$$\dot{Y}_e = S_{Ye}(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu)$$
$$\dot{Y}_\nu = S_{Y\nu}(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu)$$

T ⇒ e

ρ ⇒ ρ＊

となっていれば解ける

$$e \Rightarrow T$$
$$u^a u_a = -1 \Rightarrow w,(\rho)$$

のテーブルサーチによって閉じる

A03
A04

一般相対論的 ν 輸送

$$\dot{\rho}_* = 0 \Rightarrow \tilde{\rho}^{\,n+1/2} \text{ using } (Y_e^{\,n}, T^{\,n})$$

$$\dot{Y}_e = S_{Ye}(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu) \Rightarrow \tilde{Y}_e^{\,n+1/2} \text{ using } (\tilde{\rho}^{\,n+1/2}, Y_e^{\,n}, T^{\,n})$$

$$\dot{Y}_\nu = S_{Y\nu}(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu) \Rightarrow Y_\nu^{\,n+1/2} \text{ using } (\tilde{\rho}^{\,n+1/2}, \tilde{Y}_e^{\,n+1/2}, T^{\,n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e} = S_e(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu) \\ \dot{\varepsilon}_\nu = S_\varepsilon(\rho, Y_e, T, \varepsilon_\nu, Y_\nu) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}^{\,n+1/2}(\tilde{T}^{\,n+1}) \\ \tilde{\varepsilon}_\nu^{\,n+1/2} \end{array} \right\}$$

$$\text{using } (\tilde{\rho}^{\,n+1/2}, \tilde{Y}_e^{\,n+1/2}, \tilde{Y}_\nu^{\,n+1/2})$$

$$\begin{array}{l} e \Rightarrow T \\ u^a u_a = -1 \Rightarrow w, (\rho) \end{array}$$

のテーブルサーチによって閉じる

まとめと要望

- 状態方程式
  - (ρ ,Ye,T)でテーブル化
  - 音速が光速を超えない相対論的定式化
  - 微分(音速)もテーブル化されることが望ましい
- 電子捕獲反応(weak interaction)
  - 不安定原子核の寄与も
  - transition matrix のテーブル化

A02

- 一般相対論的 ν 輻射輸送
  - 多次元では未開拓分野
  - (近似的)定式化、full GR Boltzmann の同時進行

A04

- 星の進化計算
  - 回転モデル　　初期条件
  - シミュレーションの結果を用いた元素合成

A03